« ارتعاشات مکانیکی »

(Mechanical Vibrations)

منابع و مراجع :

۱- کتاب ارتعاشات رائو ترجمه دکتر درودیزه دانشگاه گیلان

۲- کتاب ارتعاشات استاریل ترجمه دکتر خدام

۳- کتاب ارتعاشات تامسون

۴- کتاب کمک درسی ارتعاشات سری شوم

فصل اول) سیستمهای یک درجه آزادی با ارتعاش آزاد

فصل دوم) سیستمهای یک درجه آزادی با ارتعاش اجباری

فصل سوم) سیستمهای یک درجه آزادی با ارتعاش میرا (damp vibration)

فصل چهارم) سیستمهای یک درجه آزادی با ارتعاش اجباری و میرا

فصل پنجم) سیستمهای یک درجه آزادی تحت بارگذاری اختیاری (میرا و غیر میرا) — تبدیل لاپلاس — انتگرال تلفیقی

فصل ششم) سیستمهای دو درجه آزادی با ارتعاش آزاد و اجباری

گردآورنده و استاد حل تمرین :

مهندس جواد پیله وران

« فصل اوّل - ارتعاش ساده »

فرکانس : تعداد نوسان یک سیستم در یک ثانیه که واحد آن هرتز (HZ) می‌باشد. (f)

f : Ferequency → (فرکانس طبیعی)

فرکانس زاویه‌ای یا دایره‌ای : با w نشان داده می‌شود. ($\frac{rad}{s}$)

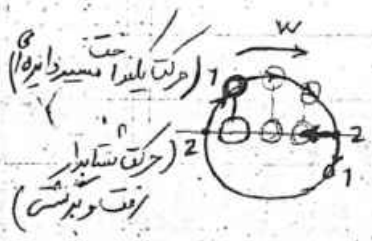
$$w = 2\pi f$$

نوسان : به یک رفت و برگشت کامل یک نوسان گفته می‌شود که یک هرتز معادل یک نوسان می‌باشد.

زمان تناوب یا پریود : با T نشان داده می‌شود و عبارتست از زمان یک رفت و برگشت کامل و زمان یک سیکل کامل که برحسب ثانیه می‌باشد.

$T = \frac{1}{f}$ (s) $T =$ زمان برگشت + زمان رفت

$f = \frac{1}{T} \Longrightarrow \boxed{f \cdot T = 1}$



فرکانس طبیعی در اثر ارتعاش یک سیستم آزاد ایجاد می‌شود.
- فرکانس زاویه‌ای طبیعی (w_n)
- فرکانس طبیعی (f_n)

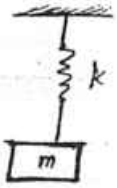
حرکت ارتعاشی : یعنی حرکت تکرار شونده ، حرکت رفت و برگشتی.

معادلات حرکت نوسانی :

$$\begin{cases} x = X \sin(wt + \varphi) = X \sin wt \cos\varphi + X \cos wt \sin\varphi \\ \text{دامنه حرکت} \\ \text{یا} \\ x = A \sin wt + B \cos wt \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = X\cos\varphi \\ B = X\sin\varphi \end{cases} \qquad A^2+B^2 = X^2 \longrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{A^2+B^2} \\ \dfrac{B}{A} = \operatorname{tg}\varphi \end{cases}$$

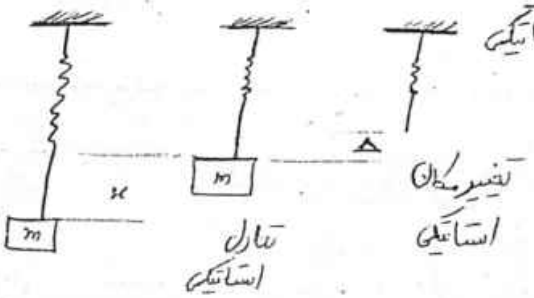
بررسی سیستم جرم و فنر :



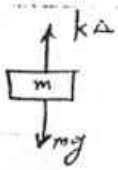
ناحیه در حال ارتعاش از حالت تعادل استاتیکی

x = تغییر مکان دینامیکی

Δ = تغییر مکان استاتیکی

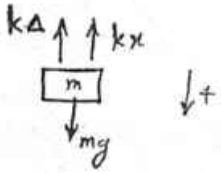


← تحلیل استاتیکی :



$$\Sigma F = 0 \longrightarrow mg - k\Delta = 0 \longrightarrow \Delta = \frac{mg}{k}$$ (تغییر مکان استاتیکی)

← تحلیل دینامیکی با در نظر گرفتن تحلیل استاتیکی:



$$\Sigma F = ma \longrightarrow mg - k\Delta - kx = ma$$

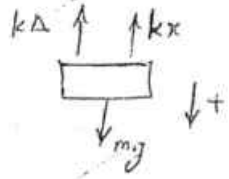
$$mg - k\Delta - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$ معادله جرم فنر

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

راه حل کوتاه : می‌توان از وزن فنر، بجای نیروی ناشی از تعادل استاتیکی صرف نظر کرد و صرفاً نیروی ناشی از تغییر مکان دینامیکی را نوشت.

← تحلیل دینامیکی بدون در نظر گرفتن تحلیل استاتیکی :



$$\Sigma F = m\ddot{x} \quad \longrightarrow \quad -kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

← پاسخ برای حرکت نوسانی ساده :

$$x = X\sin(wt + \varphi)$$

w فقط بستگی به k و m دارد.

w در هیچ مسئله ای بستگی به شرایط اولیه حرکت ندارد مانند سرعت اولیه و تغییر مکان اولیه.

X و φ بستگی به شرایط اولیه حرکت دارند.

$$-Xw^2\sin(wt+\varphi) + \frac{k}{m}X\sin(wt+\varphi) = 0$$

$$-w^2 + \frac{k}{m} = 0$$

فرکانس زاویه ای طبیعی برای سیستم جرم فنر

$$w_n = \sqrt{k/m} \quad \frac{rad}{s}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m} \quad (Hz)$$

نکته مهم : در حالت استاتیکی جرم تأثیر دارد و هیچ ارتعاشی وجود ندارد ولی در حالت دینامیکی جرم دیگر تأثیر ندارد و ارتعاشات شروع می شود.

مثال: پاسخ زمانی برای سیستم با شرایط اولیه زیر بیابید. معادله حرکت را بدست آورید.

$$\begin{cases} t = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = X\sin(wt + \varphi)$$

$$\begin{cases} x_0 = X\sin\varphi \\ 0 = Xw\cos\varphi \end{cases} \qquad \cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{X = x_0}$$

$$x = x_0\sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{x = x_0\sin\left(\sqrt{k/m}\,t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

معادله حرکت

x فاصله از نقطه تعادل استاتیکی

مثال: معادله حرکت را با شرایط اولیه زیر بدست آورید. (سیستم جرم و فنر ساده)

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

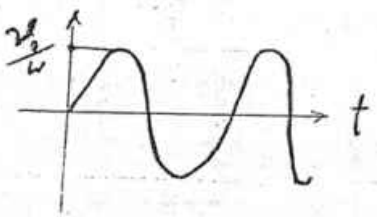
$$x = X \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} 0 = X \sin\varphi \\ v_0 = X\omega \cos\varphi \end{cases}$$

$$\sin\varphi = 0 \longrightarrow \varphi = 0 \longrightarrow \boxed{X = \frac{v_0}{\omega}}$$

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega} \sin\sqrt{k/m}\cdot t}$$ معادله حرکت



تمرین: معادله حرکت را بیابید. (سیستم جرم و فنر ساده)

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

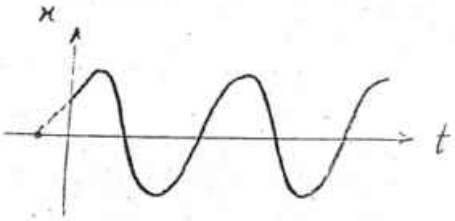
$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\begin{cases} x = X \sin(\omega t + \varphi) \\ \text{یا} \\ x = A \sin\omega t + B \cos\omega t \end{cases}$$

$$x_0 = A \sin(0) + B \cos(0) \longrightarrow \boxed{x_0 = B}$$

$$\dot{x} = A\omega \cos\omega t - B\omega \sin\omega t$$

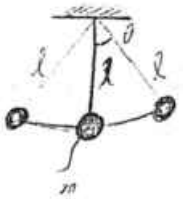
$$v_0 = A\omega \longrightarrow A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\sqrt{k/m}}$$



$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k/m}} \sin\sqrt{k/m}\, t + x_0 \cos\sqrt{k/m}\, t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{v_0^2}{k/m} + x_0^2} = \frac{v_0}{\sqrt{k/m}\cos\left(tg^{-1}\frac{x_0\sqrt{k/m}}{v_0}\right)} \\ \frac{B}{A} = tg\,\varphi \longrightarrow \varphi = tg^{-1}\frac{B}{A} = tg^{-1}\frac{x_0\sqrt{k/m}}{v_0} \end{cases}$$

آونگ ساده :



پاندول ساده

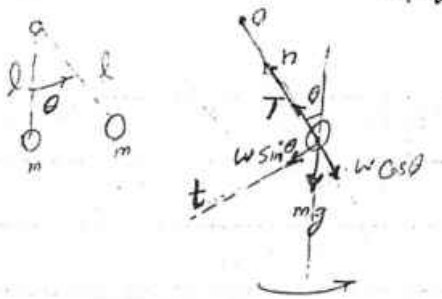
تعریف پاندول ساده :

۱- سیم بدون جرم است .

۲- جرم متمرکز است . (فاصله مرکز جرم از نقطه نوسان برابر طول سیم است .)

یعنی اگر جرم m دارای شعاع باشد دیگر متمرکز نیست چون تا $l+R$ نوسان

* ساده ترین نوع حرکت است که دارای ارتعاش دورانی می باشد .



چون حرکت دورانی است ← $\sum M_o = I_o \cdot \alpha$

$$I = \int dm \cdot r^2$$

$$-W \sin\theta \cdot l = ml^2 \ddot{\theta}$$

$\sin\theta \simeq \theta$ ⟶ اگر θ زاویه کوچکی باشد تا 10° قابل قبول است .

$$-mg\,\theta \cdot l = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -g\theta = l\ddot{\theta} \longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

معادله دیفرانسیل یک بعدی برای آونگ ساده

روش دوم :

$$\sum F_t = ma$$

$$-mg \sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

$$-g\theta = l\ddot{\theta}$$

← زیرا ارتعاش در جهت مماس بر دایره دوران است .

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{g/l} & rad/s \\ f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l} & Hz \end{cases}$$

نکته : ω_n در معادله بدست می آید و از این لحاظ دارای اهمیت است ولی f در واقع قابل اندازه گیری و محاسبه است و مهم می باشد .

تمرین: در مورد سیستم پاندول ساده به ازای سه حالت زیر معادلات حرکت را حل و رسم کنید.

در تمام تمرینها داریم: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \rightarrow w_n = \sqrt{g/l}$

$\theta = \theta \sin(wt + \varphi)$

1) $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$

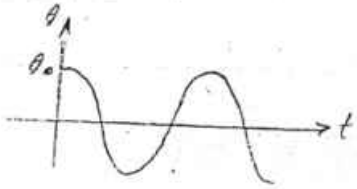
حل 1):

$\theta_0 = \theta \sin\varphi$

$\dot{\theta} = \theta w \cos(wt + \varphi) \rightarrow 0 = \theta w \cos\varphi$

$\theta = \theta_0$ $\qquad \cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{g/l}\, t + \frac{\pi}{2}\right)$

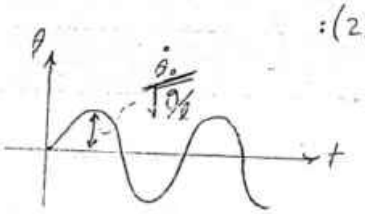


حل 2):

$0 = \theta \sin\varphi \rightarrow \sin\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$

$\dot{\theta}_0 = \theta w \cos\varphi \rightarrow \theta = \frac{\dot{\theta}_0}{w} = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{g/l}}$

$\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{g/l}} \sin\left(\sqrt{g/l}\, t\right)$



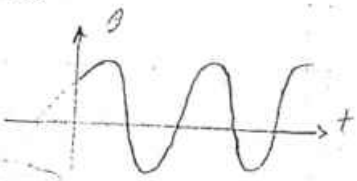
حل 3):

$\theta_0 = \theta \sin\varphi \;,\; \dot{\theta}_0 = \theta w \cos\varphi \rightarrow \theta = \frac{\dot{\theta}_0}{w \cos\varphi}$

$\theta_0 = \frac{\dot{\theta}_0}{w \cos\varphi} \sin\varphi = \frac{\dot{\theta}_0}{w} tg\varphi \rightarrow tg\varphi = \frac{\theta_0 w}{\dot{\theta}_0} \rightarrow \varphi = tg^{-1} \frac{\theta_0 \sqrt{g/l}}{\dot{\theta}_0}$

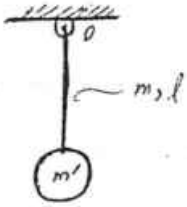
$\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{g/l} \cos\left(tg^{-1} \frac{\theta_0 \sqrt{g/l}}{\dot{\theta}_0}\right)} \sin\left(\sqrt{g/l}\, t + tg^{-1} \frac{\theta_0 \sqrt{g/l}}{\dot{\theta}_0}\right)$

$\theta = \sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{g/l} + \theta_0^2} \sin\left(\sqrt{g/l}\, t + tg^{-1} \frac{\theta_0 \sqrt{g/l}}{\dot{\theta}_0}\right)$



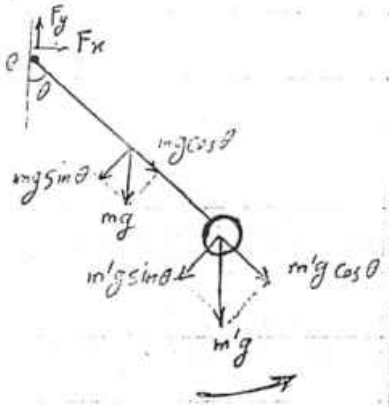
نکته: $\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}} = \sqrt{\sec^2\varphi} = \sqrt{1 + tg^2\varphi}$

آونگ مرکب :



پاندول مرکب

چون سیم دارای جرم است و جرم متمرکز است پاندول مرکب می‌باشد.



$$\sum M_o = I_o \alpha = I_o \ddot{\theta}$$

$$-(m'g\sin\theta)l - (mg\sin\theta)\frac{l}{2} = \left(m'l^2 + \frac{1}{3}ml^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\sin\theta \simeq \theta$$

$$-m'g\theta - mg\frac{\theta}{2} = \left(m'l + \frac{ml}{3}\right)\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\frac{m' + m/2}{m' + m/3}\,\theta = 0}$$

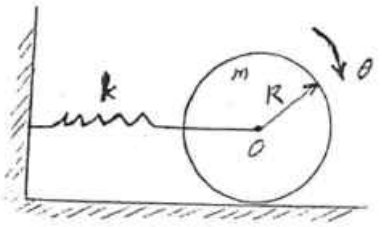
معادلهٔ دیفرانسیل حرکت برای آونگ مرکب

$$W_n = \sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m' + m/2}{m' + m/3}} \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m' + m/2}{m' + m/3}}$$

اگر $m = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ آونگ ساده

اگر $m' = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\theta = 0$ آونگ بدون جرم آویزان نقطه میله با جرم m که آونگ مرکب نام دارد.

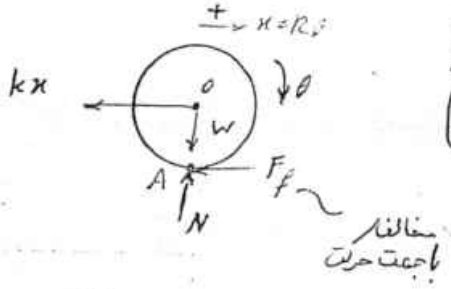
استوانه (دیسک دوار) که دارای حرکت غلتش خالص بدون لغزش است:



جسم { حرکت انتقالی / حرکت دورانی

← راه حل اول:

$x = R\theta \rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta}$



$$\begin{cases} \Sigma F = m\ddot{x} \\ -kx - F_f = mR\ddot{\theta} \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} \Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \\ +F_f \cdot R = \frac{1}{2}mR^2\cdot\ddot{\theta} \end{cases}$$

$F_f \neq \mu N$

اصطکاک کولمب حرکت لغزش

$$(**) \rightarrow -kR\theta - \frac{1}{2}mR\ddot{\theta} = Rm\ddot{\theta}$$

$$-kR\theta = \frac{3}{2}mR\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}\theta = 0$$ معادله دیفرانسیل حرکت

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \longrightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}} \ (Hz)$$

← راه حل دوم (بهترین راه حل در مسائل دارای غلتش):

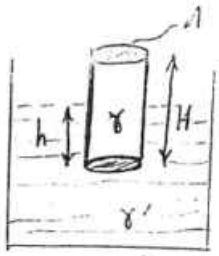
$$\Sigma M_A = I_A\cdot\ddot{\theta}$$ (نقطه A مرکز آنی دوران)

$$-kx\cdot R = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\ddot{\theta} \Rightarrow -kx = \frac{3}{2}mR\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}} \ \left(\frac{rad}{s}\right)$$

نکته: سیستمی که دارای کوپل باشد (کشاور) جهت نیروی اصطکاک هم جهت با جهت حرکت است در غیر اینصورت جهت نیروی اصطکاک مخالف با جهت حرکت است.

مسئله هیدرواستاتیکی (سیالات):



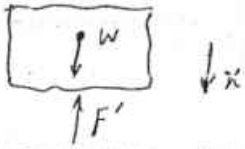
← تحلیل استاتیکی:

$$\Sigma F = 0 \longrightarrow W - F = 0$$

$$W = F \longrightarrow AH\gamma = hA\gamma'$$

$$h = H\frac{\gamma}{\gamma'}$$

← تحلیل دینامیکی:



$$\Sigma F = m\ddot{x}$$

$$W - F' = m\ddot{x}$$

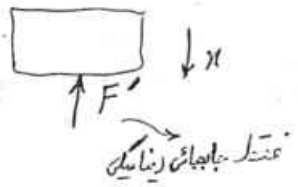
$$H\cdot A\cdot\gamma - (h+x)A\gamma' = m\ddot{x} \quad m \to W/g$$

$$H\cdot A\gamma - hA\gamma' - xA\gamma' = \frac{\gamma\cdot A\cdot H}{g}\ddot{x}$$

$$-x\gamma' = \frac{\gamma H}{g}\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma'}{\gamma}\frac{g}{H}x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{H}\frac{\gamma'}{\gamma}} \quad , \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{H}\frac{\gamma'}{\gamma}}$$

← راه حل کوتاه: (تحلیل دینامیکی بدون در نظر گرفتن تحلیل استاتیکی)

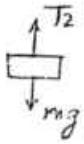


$$\Sigma F = m\ddot{x} \longrightarrow -xA\gamma' = m\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma'}{\gamma}\frac{g}{H}x = 0$$

مثال ۱ قرقره بدون جرم فرض می‌شود فرکانس طبیعی را بدست آورید.

← تحلیل استاتیکی :

$$\Sigma F = 0 \longrightarrow T_1 = 2T_2$$

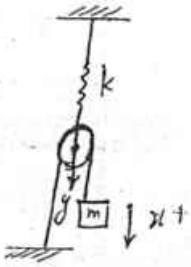


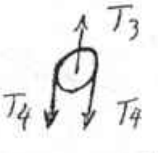
$$\Sigma F = 0 \longrightarrow T_2 = mg$$

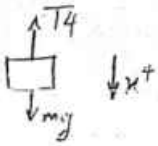
$$2mg = T_1 = k\Delta^{\text{فنر}}$$

$\Delta = \dfrac{2mg}{k}$ تغییر طول استاتیکی فنر

← تحلیل دینامیکی :







$$\Sigma F = ma \quad \begin{cases} m = 0 & \text{جرم قرقره} \\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$2T_4 = T_3$$

$$4mg - T_4 = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{T_3}{2} = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{1}{2}\left(ky + k\,\frac{2mg}{k}\right) = m\ddot{x}$$

اگر جسم به اندازه x پایین بیاید قرقره به اندازه $\frac{x}{2}$ پایین می‌آید $\Longrightarrow y = \frac{x}{2}$

$$-\frac{1}{4}kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{4m}x = 0$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{k/m}$$

تحلیل دینامیکی بدون در نظر گرفتن تحلیل استاتیکی

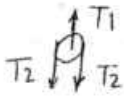
$$\Sigma F = ma$$

$$-T_4 = m\ddot{x} \Rightarrow -\frac{T_3}{2} = m\ddot{x}$$

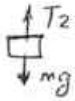
$$-\frac{ky}{2} = m\ddot{x} \Rightarrow -\frac{kx}{4} = m\ddot{x}$$

مثال: قرقره بدون جرم فرض می‌شود. فرکانس طبیعی را بدست آورید.

← تحلیل استاتیکی:



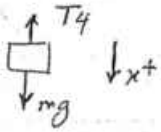
$\Sigma F = 0 \longrightarrow T_1 = 2T_2$



$\Sigma F = 0 \longrightarrow T_2 = mg$

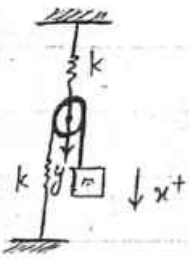
$2mg = T_1 = k\Delta_{\text{قبل}} \longrightarrow \Delta_{\text{قبل}} = \frac{2mg}{k}$

← تحلیل دینامیکی:



$\Sigma F = ma \quad \begin{cases} m = 0 & \text{جرم قرقره} \\ a \neq 0 \end{cases}$

$2T_4 = T_3$



$\begin{cases} x & \text{حرکت جرم} \\ y & \text{حرکت قسمت بالایی} \end{cases}$

$4mg - T_4 = m\ddot{x} \longrightarrow mg - \frac{T_3}{2} = m\ddot{x}$

$\cancel{mg} - \frac{1}{2}\left(ky + k\,\frac{2mg}{k}\right) = m\ddot{x}$

تأثیر این قسمت نقطه در تفسیر مکان نیروست و در نیرو تأثیر ندارد.

$\boxed{-\frac{1}{2}ky = m\ddot{x}} \quad (*)$

جسم را نگه داشته قرقره را پایین می‌آوریم.
قرقره ثابت جسم را پایین می‌آوریم.

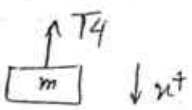
$T_4 = mg + k(x - 2y) \quad , \quad T_3 = ky + k\,\frac{2mg}{k}$

$2T_4 = T_3 \Longrightarrow \cancel{2mg} + 2k(x - 2y) = ky + \cancel{2mg}$

$2x = 5y$

$(*) \Longrightarrow -\frac{1}{2}k\left(\frac{2x}{5}\right) = m\ddot{x} \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{5m}x = 0$

← تحلیل دینامیکی بدون در نظر گرفتن تحلیل استاتیکی:



$\Sigma F = ma$

$-T_4 = m\ddot{x} \longrightarrow -\frac{T_3}{2} = m\ddot{x}$

$T_4 = k(x - 2y) \; , \; T_3 = ky \xrightarrow{T_3 = 2T_4} 2x = 5y$

تایپ و تکثیر عـــــاجی
بلوار امامیه - بین ۳۷ و ۳۹
تلفن: ۶۶۴۳۳۵۱

کاربرد روش انرژی در مسائل یک درجه آزادی با ارتعاش آزاد :

(انرژی مکانیکی) $E_m = \underset{\text{پتانسیل}}{E_p} + \underset{\text{جنبشی}}{E_c} = cte$ ⟸ اگر به سیستم انرژی داده نشود یا از آن انرژی گرفته نشود. (اگر به سیستم بار خارجی وارد نشود انرژی به آن داده نمی‌شود یا سیستم میرا نباشد که انرژی را از طریق اصطکاک از دست ندهد.)

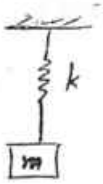
$$\underset{\text{پتانسیل}}{V} + \underset{\text{جنبشی}}{U} = cte$$

$$d(V+U) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(V+U) = 0 & \text{روش اول} \\ V_{max} = U_{max} & \text{روش دوم} \end{cases}$$

هر جا انرژی پتانسیل حداکثر است انرژی جنبشی صفر است.
هر جا انرژی جنبشی حداکثر است انرژی پتانسیل صفر است. ⟵

مثال: در سیستم جرم و فنر ساده به روش انرژی فرکانس طبیعی را بدست آورید.



روش اول)

$$U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

از لحظه تعادل استاتیکی به بعد انرژی‌ها را در نظر می‌گیریم. (قسمت‌های استاتیکی حذف می‌شود.)

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2\right) = 0$$

$$m \cancel{\dot{x}} \ddot{x} + k x \cancel{\dot{x}} = 0 \longrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

روش دوم)

$$x = X \sin(wt + \varphi)$$

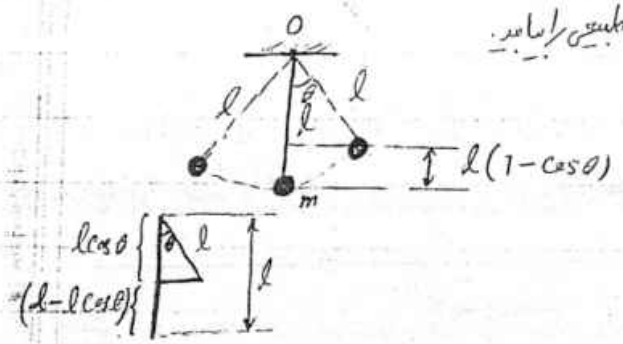
$$\sin(\,) = 1 \longrightarrow V_{max} = \frac{1}{2} k X^2$$

$$\dot{x} = X w \cos(wt + \varphi)$$

$$\cos(\,) = 1 \longrightarrow U_{max} = \frac{1}{2} m X^2 w^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} k X^2 = \frac{1}{2} m X^2 w^2$$

$$w^2 = k/m$$

مثال: در سیستم آونگ ساده به روش انرژی فرکانس طبیعی را بیابید.



روش اول)

$$U = \frac{1}{2} I_o \cdot \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

بسط تیلور $\Rightarrow 1 - \cos\theta = 1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{\theta^2}{2}$

$$V = mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{d(U+V)}{dt} = 0 \Longrightarrow \cancel{m}l^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{l}\theta\dot{\theta} = 0$$

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l}$$

روش دوم)

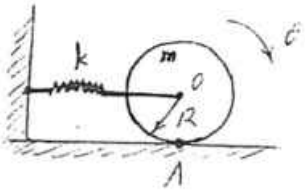
$$\theta = \theta \sin(wt + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = \theta w \cos(wt + \varphi)$$

$$V_{max} = \frac{mgl}{2}\theta^2$$

$$U_{max} = \frac{1}{2} m l^2 \theta^2 w^2 \quad \Longrightarrow \quad w_n = \sqrt{g/l}$$

مثال : دیسک دارای غلتش خالص بدون لغزش.



$x = R\theta$

حرکت { انتقالی / دورانی

$V = \frac{1}{2} k x^2$

$$U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2}$$

باید حفظ شود $\boxed{U = \frac{3}{4} m \dot{x}^2}$

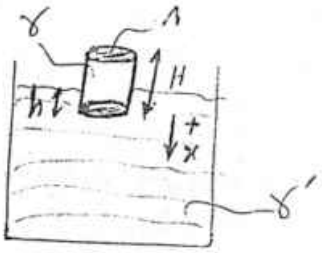
نقطه A مرکز آنی دوران $\Rightarrow U = \frac{1}{2} I_A \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m R^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2$

$$\frac{d}{dt}(V + U) = 0 \Rightarrow k x \dot{x} + \frac{3}{2} m \dot{x} \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m}}$$

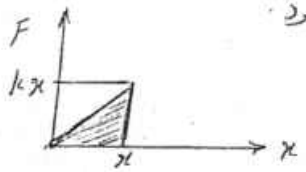
مثال : شناور استاتیک



انرژی پتانسیل $V = \int_0^x F \cdot dx = \frac{1}{2} k x^2$

قدر $F = kx$

F نیروی داخلی است که سبب ایجاد نوسان شود.



$$V = \int_0^x F.dx = \int_0^x xA\gamma' dx = A\gamma' \frac{x^2}{2}$$

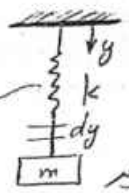
$$U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{A.\gamma H}{2g}\dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{A\gamma H}{2g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}A\gamma' x^2\right) = 0$$

$$\frac{A\gamma H}{g}\dot{x}\ddot{x} + A\gamma' x\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma'.g}{\gamma.H}x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\gamma' g}{\gamma H}}$$

مثال: در سیستم جرم و فنر که فنر نیز دارای جرم است فرکانس طبیعی را بیابید.



m' و ρ دانسیته طولی فنر

الف) روش انرژی

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

جرم فنر نمی‌کند فنر تنش داشته باشد یا خیر

$$U = U_{mass} + U_{spring}$$

$$U_{mass} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

با فرض خطی بودن تغییرات سرعت فنر

$$dU_s = \frac{1}{2}dm'\left[\left(\frac{y}{l}\right)\dot{x}\right]^2 \qquad dm' = \rho dy$$

$$dU_s = \frac{1}{2}\rho dy.\frac{y^2}{l^2}\dot{x}^2 \longrightarrow U_s = \frac{1}{2}\frac{\rho\dot{x}^2}{l^2}\int_0^l y^2 dy$$

$$U_s = \frac{1}{2}\rho\frac{\dot{x}^2}{l^2}.\frac{l^3}{3} = \frac{1}{6}\rho l\dot{x}^2 \xrightarrow{\rho l = m'} U_s = \frac{m'\dot{x}^2}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d'V = \frac{1}{2} k x^2 \\ d'U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{6} m' \dot{x}^2 \end{cases}$$

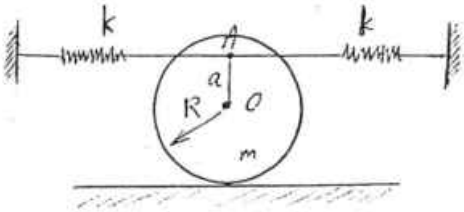
$$\frac{d}{dt}(U+V) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \times \frac{1}{2} m \dot{x} \ddot{x} + 2 \times \frac{1}{6} m' \dot{x} \ddot{x} + 2 \times \frac{1}{2} k x \dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m + \frac{m'}{3}} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m'}{3}}} \quad , \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m'}{3}}}$$

به $\frac{m'}{3}$ جرم معادل یا جرم مؤثر می‌گویند.

ب) روش نیوتن

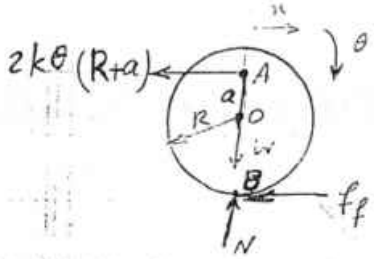
تمرین : مطلوب است تعیین معادله حرکت و فرکانس طبیعی به روش نیوتن و به روش انرژی .



1) سیستم متقارن غلتش بدون لغزش دارد.

الف) روش نیوتن :

$$\sum M_o = I_o \ddot{\theta}$$



$$(*) \quad f_f \cdot R - 2k(R+a)\theta \times a = \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta}$$

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$\boxed{x = R\theta}$$

$$-f_f - 2k(R+a)\theta = mR\ddot{\theta}$$

$$f_f = -\left(2k(R+a)\theta + mR\ddot{\theta}\right)$$

با جایگذاری در رابطه (*) $\Rightarrow -\left(2kR(R+a)\theta + mR^2\ddot{\theta} + 2k(R+a)a\theta\right) = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2k(R+a)^2}{\frac{3}{2}mR^2}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4}{3}\frac{k}{m}\left(\frac{R+a}{R}\right)^2}$$

یا مرکز آنی دوران $\sum M_B = I_B \ddot{\theta} \Rightarrow -2k(R+a)^2\theta = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{2k(R+a)^2}{\frac{3}{2}mR^2}\theta = 0$$

ب) روش انرژی :

انرژی پتانسیل $V = \overset{\text{دو فنر}}{2} \times \frac{1}{2} k(R+a)^2\theta^2$

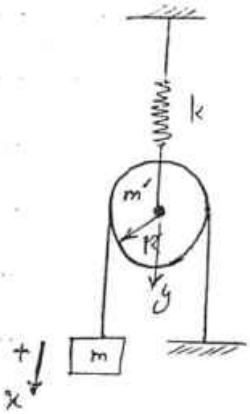
$$\boxed{x = R\theta}$$

انرژی جنبشی $U = \frac{1}{2} m \dot{x}_o^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\dot{\theta}^2$

$$\frac{d(U+V)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2k(R+a)^2\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4k(R+a)^2}{3mR^2}\theta = 0$$

یا مرکز آنی $U_B = \frac{1}{2} I_B \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} mR^2 \dot{\theta}^2$



$$\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow -T_2 = m\ddot{x}$$

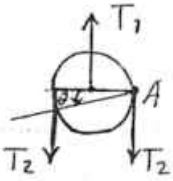
(روش اول)

mg در یک سرعتاب بدلیل تأثیر در عدم تعادل قسد

از وزن حذف و نیروی

صرف نظر می شود.

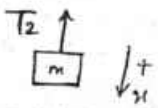
$$\sum M_A = I_A\ddot{\theta}$$



$$T_2 \cdot 2R - T_1 \cdot R = \left(\frac{m'R^2}{2} + m'R^2\right)\ddot{\theta}$$

$$-m\ddot{x}\cdot 2R - T_1 \cdot R = \frac{3}{2}m'R^2\ddot{\theta}$$

$$\boxed{x = 2R\sin\theta = 2R\theta} \qquad \boxed{T_1 = kR\theta}$$



$$-m(2R\ddot{\theta})\cdot 2R - kR^2\theta = \frac{3}{2}m'R^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}\left(\frac{3}{2}m'R^2 + 4R^2m\right) + kR^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{4m + \frac{3}{2}m'}\theta = 0 \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m + \frac{3}{2}m'}}$$

(روش دوم)

پتانسیل $V = \frac{1}{2}k(y^2) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}kx^2$ $\qquad \boxed{y = \frac{x}{2}}$

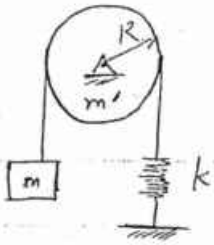
جنبشی $U_0 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m'\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m'\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}m'R^2\dot{\theta}^2$

$$U_0 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}m'\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m'R^2\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{16}m'\dot{x}^2$$

مرکز دوران $U_A = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m'R^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{3}{16}m'\dot{x}^2$

$$\frac{d(V+U)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} + \frac{3}{8}m'\dot{x}\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{4m + \frac{3}{2}m'}x = 0 \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m + \frac{3}{2}m'}}$$



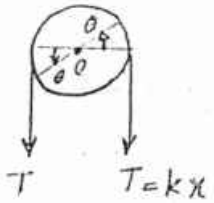
از نیروهای $m'g$ و mg بدلیل تأثیر در عدم تعادل فنر صرف نظر می‌شود.

روش اول):

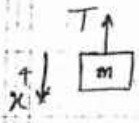
$$\sum M_0 = I_0 \ddot{\theta}$$

$$T \cdot R - kx \cdot R = \frac{1}{2} m' R^2 \ddot{\theta} \quad (*)$$

$$\boxed{x = R\sin\theta = R\theta}$$



$$\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow -T = m\ddot{x} \rightarrow \boxed{T = -mR\ddot{\theta}}$$



در رابطه (*) $\quad -mR^2\ddot{\theta} - kR^2\theta = \frac{m'R^2}{2}\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{\frac{m'}{2}+m}\theta = 0 \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\frac{m'}{2}+m}}$$

روش دوم):

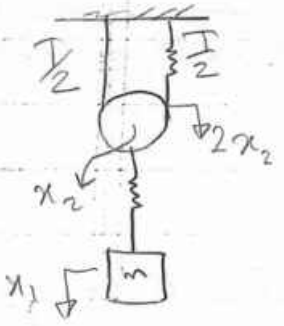
$$V = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

$$U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m'R^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d(U+V)}{dt} = 0 \Rightarrow kR^2\theta\dot{\theta} + mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}m'R^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{\frac{m'}{2}+m}\theta = 0$$

مثال:



$$-T = m\ddot{x}_1$$

$$\rightarrow -k x_{1\,\text{فنر}} = m\ddot{x}_1 \qquad x_{1\,\text{فنر}} = (x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_1 \\ \frac{T}{2} = 2k(2x_2) = 8kx_2 \end{cases} \Rightarrow -k(x_1 - x_2) = 8kx_2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{9}$$

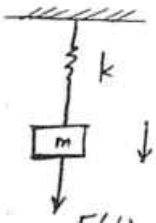
$$\rightarrow -k\left(x_1 - \frac{x_1}{9}\right) = m\ddot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{8k}{9m}x_1 = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{8}{9}\frac{k}{m}}$$

تایپ و تکثیر عصادی
بلوار امامیه - بین ۳۷ و ۳۹
تلفن: ۶۶۴۳۳۵۱

« فصل دوم - ارتعاش اجباری غیر میرا »

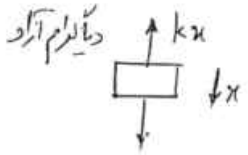
(Forced un damped vibration)

فرض می‌شود بار اجباری یک بار هارمونیک ساده (سینوسی) باشد.



$F(t) = F_0 \sin wt$

بار هارمونیک
یا بار تحریک
(Exciting load)



$F_0 \sin wt$

دامنه نیروی تحریک
فرکانس تحریک

از معادله به بعد:

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$-kx + F_0 \sin wt = m\ddot{x}$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin wt$$

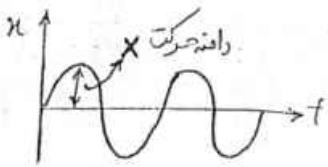
$$(\text{پاسخ حرکت})\ x = \underbrace{A\cos w_n t + B\sin w_n t}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{\frac{F_0}{m(w_n^2 - w^2)}\sin wt}_{\text{پاسخ دائمی یا یکنواخت}}$$

تعریف: پاسخ گذرا (پاسخی است که بدلیل میرایی سیستم به مرور زمان از بین می‌رود) از بین رفته باشد و فقط پاسخ یکنواخت باقی بماند.

$$x = \frac{F_0}{m(w_n^2 - w^2)}\sin wt \Rightarrow \boxed{\frac{F_0}{m(w_n^2 - w^2)} = X}$$

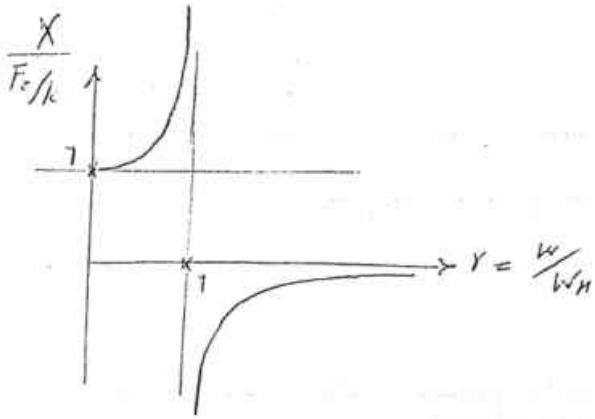
دامنه حرکت یکنواخت

$$X = \frac{F_0}{\underbrace{m \cdot w_n^2}_{m \cdot \frac{k}{m}}\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)} = \frac{F_0}{k\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)} = \frac{F_0/k}{1 - \frac{w^2}{w_n^2}}$$



$$\Rightarrow \frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{1 - \frac{w^2}{w_n^2}} \xrightarrow{\frac{w}{w_n} = r} \boxed{\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{1 - r^2}}$$

توجه: ω_n همیشه ثابت بوده و ω متغیر می‌باشد.



بار F_0 به کل سیستم خاموش $\begin{cases} r=0 \\ \omega=0 \end{cases}$

استاتیکی به سیستم وارد می‌شود.

بنابراین:

$$X = \frac{F_0}{k} \quad \text{یا} \quad \frac{X}{F_0/k} = 1$$

رزونانس یا تشدید

$$\begin{cases} r \to 1 \\ \omega \to \omega_n \\ X \to \infty \end{cases}$$

وقتی $r \to 1$ میل می‌کند فرکانس نیروی محرک به یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم منطبق می‌شود و حالت تشدید یا رزونانس اتفاق می‌افتد و نوسانی با دامنهٔ بزرگ خطرناکی ممکن است اتفاق افتد. مانند شکست سازه‌های نظیر پل‌ها و ساختمان‌ها.

$$\begin{cases} r \to \infty \\ \omega \to \infty \\ X \to 0 \end{cases}$$

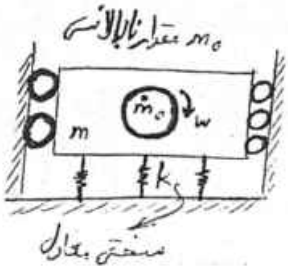
ناگهانی بودن بار وارده بر سیستم باعث ناپایداری سیستم می‌شود.

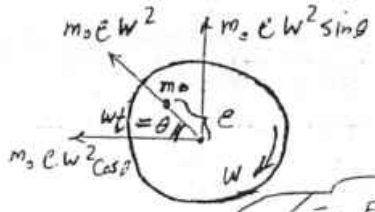
به علت سرعت تغییر جهت بار هارمونیک فرصت انتقال حرکت وجود ندارد.

ارتعاش اجباری
- F_0 تابعی از ω نیست. (I)
- F_0 تابعی از ω است. (II) ← سیستم‌های دوار غیربالانس (لرزش ماشین‌های نظیر موتور، یخچال، لباسشویی و خودرو)

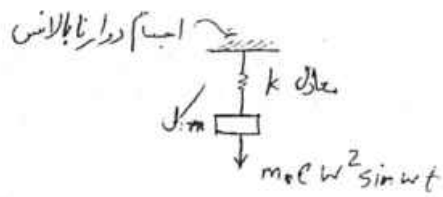
توجه: اگر سیستم بالانس باشد ارتعاش ندارد و اگر نخواهد ارتعاش داشته باشد باید از نوع (II) باشد.

ارتعاش اجباری مدل ساده نوع دوم:





e خروج از مرکز $\quad \theta = \omega t$



$$F = m_0 e \omega^2 \sin \omega t$$ بار تحریک

F_0

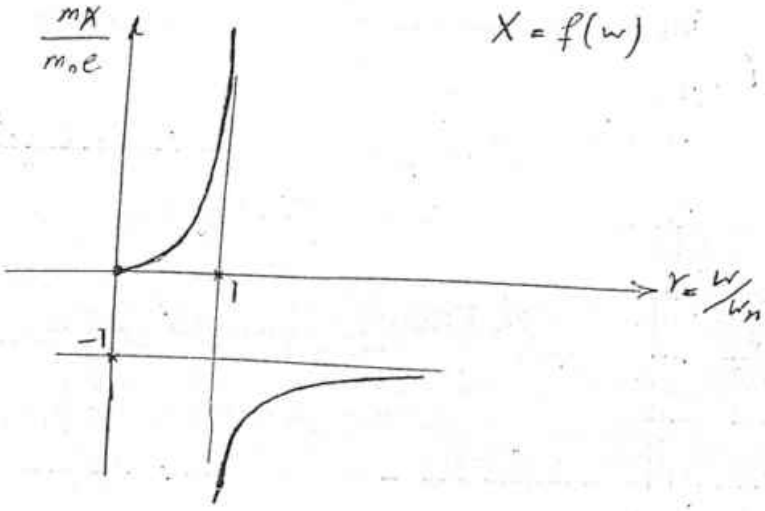
دامنه بار تحریک

از تحلیل مسئله نوع I :

$$X = \frac{F_0}{m(w_n^2 - w^2)} = \frac{m_0 e w^2}{m(w_n^2 - w^2)}$$

$$X = \frac{m_0 e w^2}{m w_n^2 \left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)} = \frac{m_0 e \left(\frac{w}{w_n}\right)^2}{m\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)} = \frac{m_0 e r^2}{m(1 - r^2)}$$

جرم کل ← $\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{1 - r^2}$ ← جرم نامیزان

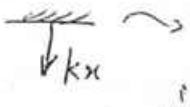


$$\begin{cases} r = 0 \\ w = 0 \\ \text{سیستم خاموش} \\ X = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \to 1 \\ w \to w_n \quad \text{(تشدید) رزونانس} \\ X \to \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \to \infty \\ w \to \infty \\ \frac{mX}{m_0 e} \to -1 \\ X \to \frac{-m_0 e}{m} \end{cases}$$

* فنداسیون سنگین باعث بالا رفتن m و اگر جنس آن از فوم باشد که جاذبه ارتعاشات باشد ارتعاشات را کاهش می دهد.



این تکیه گاه می تواند فنداسیون زیر ماشین باشد.

تعیین نسبت انتقال در ارتعاشات اجباری :

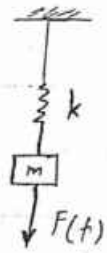
(Transmissio Ratio) $T.R_0$

$$T.R_0 = \frac{F_{TR}}{F_0}$$

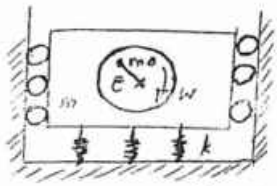
$T.R_0 =$ حداکثر بار وارد بر تکیه‌گاه / حداکثر بار وارد بر جسم

$T.R_0$ تابعی از زمان نیست.

(نوع اول)



$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$



(نوع دوم)

اگر $T.R_0 > 1$ $\Rightarrow$ حداکثر بار وارد بر تکیه‌گاه بیش از حداکثر بار وارد بر جسم یا بیش از بار تحریک است.

اگر $T.R_0 < 1$ $\Rightarrow$ حداکثر بار وارد بر تکیه‌گاه کمتر از حداکثر بار تحریک است.

F_{TR} حداکثر بار تحریکی ، $F_{max} = kX$ حداکثر بار تکیه‌گاه ، $F = kx$ تکیه‌گاه معادل

$$T.R_0 = \frac{kX}{F_0} \Rightarrow$$

ω مستقل از F_0

I نوع) $T.R_0 = \dfrac{X}{F_0/k} = \dfrac{1}{1-r^2}$

II نوع) $T.R_0 = \dfrac{kX}{F_0}$ ، $F_0 = m_0 e \omega^2$ ، $\dfrac{MX}{m_0 e} = \dfrac{r^2}{1-r^2}$ از قبل داریم

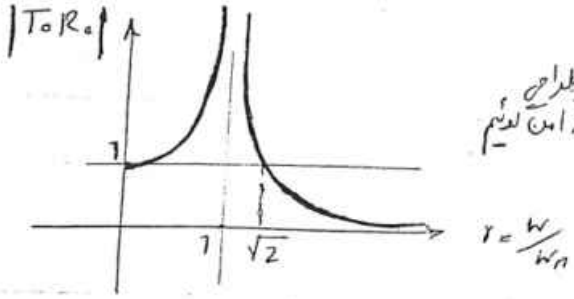
هیچ‌کدام تابعی از زمان نیست

F_0 تابعی از ω

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \frac{k}{M} = \omega_n^2$$

$$\Rightarrow \frac{k\, m_0 e r^2}{M(1-r^2)\, m_0 e \omega^2} = \frac{1}{1-r^2}$$

$$(\text{I نوع} \ , \ \text{II نوع}) \Rightarrow \boxed{|T.R_0| = \left|\frac{1}{1-r^2}\right| = \frac{1}{|1-r^2|} = \frac{kX}{F_0}}$$



از نظر طراحی نقطه امن کدوم

$$\begin{cases} 0 < w < \sqrt{2}\, w_n \\ 0 < r < \sqrt{2} \\ |T_0R_0| > 1 \end{cases}$$

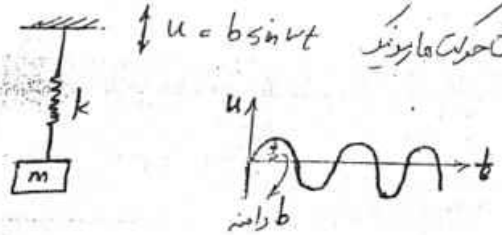
$$\begin{cases} r > \sqrt{2} \quad , \quad w > \sqrt{2}\, w_n \\ |T_0R_0| < 1 \end{cases}$$

در این حالت نیروی وارد شده به نیروی تکیه‌گاه کاملاً برابر است. $r = \sqrt{2}$

$r = 1$ نقطه تشدید یا رزونانس است.

دور شدن از رزونانس $\omega \simeq 1.4\,\omega_n = 1.4\sqrt{\frac{k}{m}}$

ارتعاش اجباری جسم در اثر حرکت هارمونیک تکیه‌گاه :

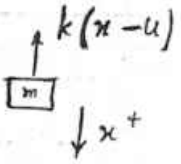


* دیگر به جسم بار تحریک وارد نمی‌شود و تکیه‌گاه تحت حرکت هارمونیک قرار دارد.

u : حرکت هارمونیک

b : دامنه حرکت هارمونیک

حال حرکت ارتعاشی جسم را تعلیل کنید :



$$-k(x-u) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = ku$$

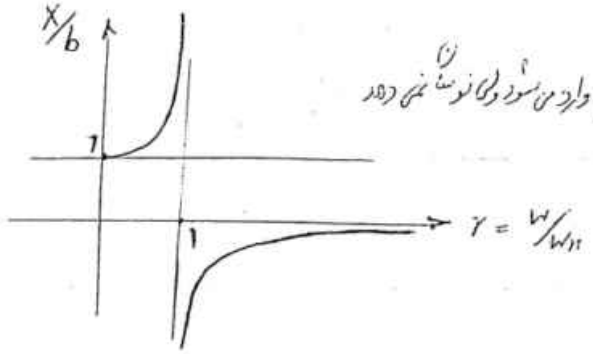
$$\boxed{m\ddot{x} + kx = kb\sin wt}$$

چون $F_0 = kb$ و تابعی از w نسبت از نوع (I) است.

حل یکنواخت یا دائمی معادله دیفرانسیل فوق مانند حل انجام شده برای برای سیستم نوع (I) است :

$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin wt$, $X = \frac{F_0}{m(w_n^2 - w^2)}$ دامنه پاسخ یکنواخت $\quad x = X\sin wt$

در مسئله فوق $\Rightarrow X = \frac{k \cdot b}{m w_n^2 (1 - r^2)} = \frac{b}{1 - r^2} \longrightarrow \boxed{\frac{X}{b} = \frac{1}{1 - r^2}}$



$$\begin{cases} r=0 \ \text{یا} \ w=0 \\ X=b \end{cases}$$

بار به جسم وارد می‌شود ولی نوسان نمی‌دهد

تغییر مکان جسم و تکیه‌گاه باهم برابر است.

$$\begin{cases} r\to 1 \ \text{یا} \ w\to w_n \\ X\to\infty \end{cases}$$

حالت تشدید یا رزونانس

$$\begin{cases} r\to\infty \ \text{یا} \ w\to\infty \\ X\to 0 \end{cases}$$

ارتعاش جسم به صفر می‌رسد

اگر در این مسئله بخواهیم دامنه تغییر طول فنر را نیز تحلیل کنیم داریم:

تغییر طول فنر $z = x-u$

دامنه تغییر طول فنر $= Z$

$$m\ddot{x}+kx=ku$$

$$m\ddot{x}+kx=k(x-z)$$

$$m(\ddot{u}+\ddot{z})+kx=kx-kz$$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=z+u \\ \ddot{x}&=\ddot{z}+\ddot{u}\end{aligned}}$$

$$\ddot{u}=-bw^2\sin wt$$

$$m\ddot{z}+kz=-m\ddot{u}$$

معادله دیفرانسیل تغییر طول فنر

$$m\ddot{z}+kz=mbw^2\sin wt$$

سیستم اجباری ارتعاش نوع II

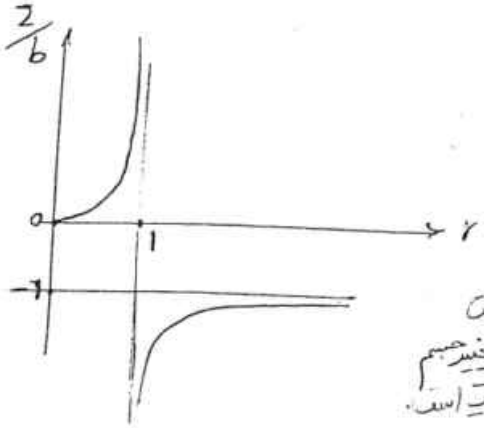
$$m\ddot{x}+kx=m_0e w^2\sin wt$$

$$\left[\frac{mX}{m_0e}=\frac{r^2}{1-r^2}\right]$$

$$\frac{mZ}{mb}=\frac{r^2}{1-r^2}$$

دامنه تغییر طول فنر

$$\boxed{\frac{Z}{b}=\frac{r^2}{1-r^2}}$$



$r = 0$ یا $w = 0$

$Z = 0$ زمانی که تکیه‌گاه تغییر مکان می‌کند ولی نوسان ندارد فنر هم تغییر مکان ندارد

$r \to 1$ یا $w = w_n$

$Z \to \infty$ حالت تشدید یا رزونانس

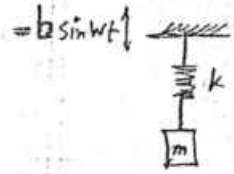
دامنه حرکت و دامنه تغییر جسم بینهایت است.

$r \to \infty$ یا $w \to \infty$

$Z \to -b$ تغییر طول فنر مخالف تغییر مکان فنر است.

---

* شرط ساختن ارتعاش سنج یا شتاب سنج :

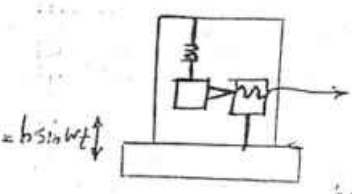


$w_n = \sqrt{k/m}$

$w_n \gg$ خیلی بزرگ $\longrightarrow$ $k \uparrow\uparrow$ فنر خیلی سخت $\quad m \downarrow\downarrow$ جرم کوچک $\Longrightarrow r = \frac{w}{w_n} \downarrow\downarrow$

$w_n \ll$ خیلی کوچک $\longrightarrow$ $k \downarrow\downarrow$ فنر نرم $\quad m \uparrow\uparrow$ جرم بزرگ $\Longrightarrow r = \frac{w}{w_n} \uparrow\uparrow$

$\uparrow\uparrow r = \frac{w}{w_n} \Longrightarrow \frac{Z}{b} = \frac{r^2}{1-r^2} \to -1 \Longrightarrow \boxed{Z \simeq -b}$



$Z \simeq -b$

دامنه سنج ثبت شده تقریباً برابر است با دامنه ارتعاش تحریک

ارتعاش سنج که در r بزرگ رخ می‌دهد

این حالت نمی‌تواند واقعی باشد چون باید دمپر را نیز حساب کرد.

حالت دوم:

فنر سخت k

جرم سبک m $\Rightarrow w_n \gg \Rightarrow r \downarrow$

$$\frac{Z}{b} = \frac{r^2}{1-r^2} \Rightarrow \frac{Z}{b} = \frac{w^2/w_n^2}{1-w^2/w_n^2}$$

$$Z\underbrace{\left(1-\frac{w^2}{w_n^2}\right)}_{\simeq 1}\cdot w_n^2 = b w^2$$

$$Z \cdot w_n^2 \simeq b w^2 = |\ddot{u}_{max}|$$

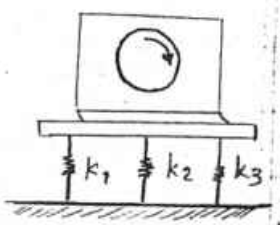
راه نیت شده — بحرانی فرکانس طبیعی — شتاب ماکزیمم

شتاب سنج

که در r نزدیک صفر روی می دهد.

مثال: موتوری به وزن 50 kg بر روی سه فنر به سختی معادل k سوار شده است. اگر سرعت دورانی موتور 1500 rpm باشد سختی k را چنان محاسبه کنید تا 70% از نیروی نامیزانی موتور به تکیه گاه منتقل شود. (نیروی منتقل شده 10% نیروی اعمال شده باشد)

$$|T.R| = \frac{1}{|1-r^2|} = 0.1 \qquad \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 = 11$$



$$w_n^2 = \frac{k_{معادل}}{m} = \frac{w^2}{11} \Rightarrow k = \frac{m w^2}{11}$$

$$n = 1500 \text{ rpm} \Rightarrow w = \frac{1500\pi}{30} = 50\pi \text{ rad/s}, \quad m = 50 \text{ kg}$$

$k_1 = k_2$

معادل $k = k_1 + k_2 +$

$\Rightarrow w^2 = 25000 \rightarrow \dfrac{1}{\left|1-\dfrac{25000\times 50}{k_{معادل}}\right|} = 0.1$

$k_{معادل} = 113636.37 \longrightarrow k_{هر فنر} = 37878.8$

0.3cm 1000 kg

مثال: دستگاهی به جرم 500 kg بر روی فنرهایی با خیز استاتیکی 0.5cm سوار شده است. نامیزانی دستگاه $m_0 e = 0.2\ kg.m$ است. دامنه لرزش دستگاه (X) و نیروی منتقل شده به تکیه‌گاه $(F_{T.R})$ در سرعت 1200 rpm دستگاه چقدر است؟ اگر دستگاه بر روی یک فنر انبساطی 1000 kg نصب شود مسئله را مجدداً حل کنید.

? تغییرات بوسطه اجازه کند

3000 rpm

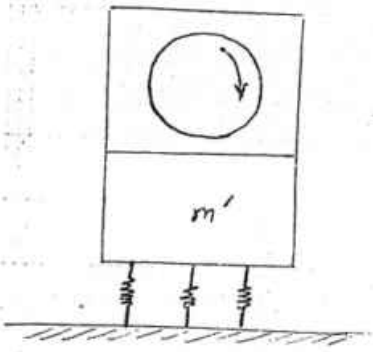
$$k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{5000}{0.5\times 10^{-2}} = 10^6\ N/m$$

$$W_n^2 = k/m = \frac{10^6}{500}\ ,\quad W = \frac{2\pi n}{60} = 40\pi\ rad/s$$

$$X = \frac{m_0 e}{m}\left|\frac{r^2}{1-r^2}\right| \Rightarrow r^2 = \frac{1600\pi^2\times 500}{10^6} \simeq 8$$

$$X = 0.5\times 10^{-3}\ m\ ,\quad F_{T.R} = 500N = kX$$

* مقدار دامنه لرزش $X = 0.5^{mm}$ برای یک دستگاه زیاد است.



فرض 1) خیز استاتیکی تغییر نکند یعنی نوع فنر تغییر کند:

$$k = \frac{15000}{0.5\times 10^{-2}} = 3\times 10^6\ N/m$$

$$W_n^2 = \frac{3\times 10^6}{1500} = \frac{10^6}{500}\ ,\quad W = 40\pi\ rad/s$$

$$r^2 = 8$$

$$X = \frac{m_0 e}{m}\left|\frac{r^2}{1-r^2}\right| \simeq 0.17\times 10^{-3}\ m$$

$m' = 1500\ kg$

$$F_{T.R} \simeq 500N$$

فرض 2) خیز استاتیکی تغییر کند (نوع فنر تغییر نکند):

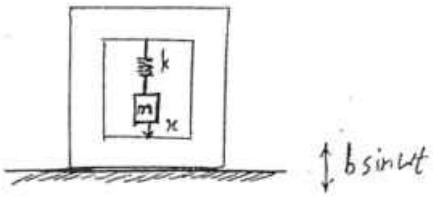
$k = 10^6\ N/m\ ,\quad \Delta = 1.5\ cm$

$$W_n^2 = \frac{10^6}{1500}\ ,\quad W = 40\pi\ \frac{rad}{s}\ ,\quad r^2 = \frac{1600\pi^2\times 1500}{10^6} = 24$$

$$X = \frac{m_0 e}{m}\left(\frac{24}{23}\right) \simeq 0.75\times 10^{-3}\ m\ ,\quad F_{T.R} = kX \simeq 750\ N$$

مثال: دامنه؟

$$\begin{cases} m = 2.5\,kg \\ f = 4\,Hz \\ b = 2\,mm \end{cases}$$



اگر نیروی استاتیکی 5N به جسم وارد شود 10mm جابجا می‌شود.

$$k = \frac{F}{x} = \frac{5}{0.01} = 500\ N/m$$

$$\omega_n^2 = k/m = 500/2.5 = 1000$$

$$\omega^2 = (2\pi f)^2 = 4\pi^2 \times 16 = 631.6$$

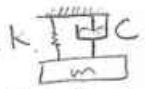
$$X = \frac{b}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \frac{2}{1 - \frac{631.6}{1000}} = 5.43\ mm$$ دامنه ارتعاش

« فصل سوم - ارتعاش میرای غیر اجباری یا مستهلک شونده »

(Damped Vibration)

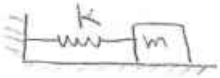
کلیه سیستم های ارتعاشی کم و بیش در معرض میرایی هستند زیرا انرژی بوسیله اصطکاک و دیگر مقاومت ها تلف می شود. اگر میرایی کوچک باشد تأثیر خیلی کمی بر فرکانس های طبیعی سیستم دارد و به این دلیل محاسبات فرکانس های طبیعی عموماً بر اساس بدون میرایی انجام می گیرد. از طرف دیگر میرایی اهمیت زیادی در محدود ساختن دامنه نوسان در حالت تشدید دارد.

اگر سیستم ارتعاشی پس از مدتی متوقف شود و انرژی جنبشی تبدیل به اصطکاک و گرما گردد یک سیستم ارتعاشی میرا خواهیم داشت: در زمان ارتعاش رفته رفته انرژی حرکت جذب شود تا دامنه ی حرکت به سمت صفر میل نماید. نوسان حرکت ارتعاشی میرا شونده می باشد.

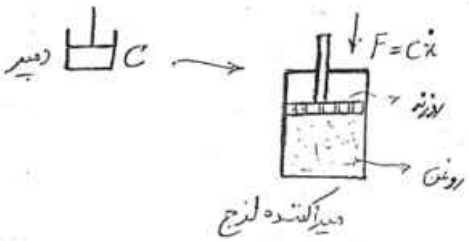


میرا (Damper) ← میراکننده لزج ← میراکننده روغنی مانند کمک فنرها (Dashpot)

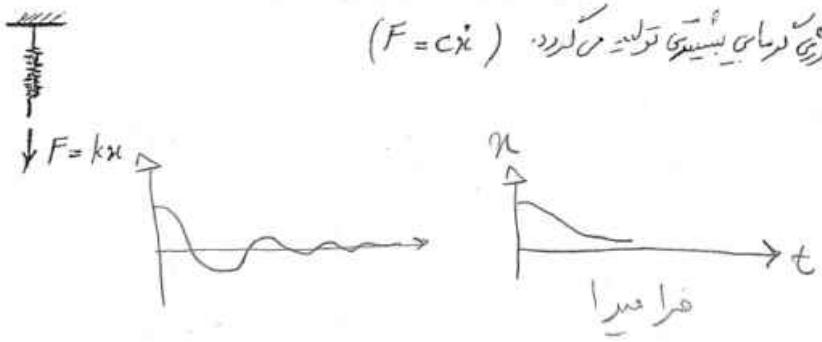
میراکننده خشک (کولمب) ← اصطکاک کولمب (اصطکاک بین جسم و زمین یا اصطکاک در کلیه کامها یا یاتاقانها نقش اینگونه ای دارد)

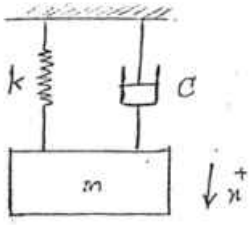


علت استفاده از دمپر بطور موازی در سیستم جرم و فنر این است که چون در استفاده از فنر به تنهایی انرژی از بین نمی رود باید با استفاده از دمپر انرژی را میرا کرد و دامنه نوسان را صفر کرد.



دمپر یک سیلندر و پیستون سوراخ سوراخ است که با رفتن آن به پائین روغن از سوراخ ها گذر کرده به بالا می آید و با رفتن پیستون به بالا روغن از سوراخ ها گذر کرده و به پائین می آید و انرژی جنبشی مکانیکی به این ترتیب به اصطکاک و انرژی گرمایی تبدیل می شود و هر چه این سرعت بیشتر باشد انرژی گرمایی بیشتری تولید می گردد. $(F = c\dot{x})$



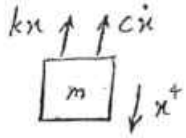


$N = c \times \frac{m}{s}$ نیوتن

c : ثابت دمپر میرایی $\frac{N \cdot s}{m} = \frac{kg \cdot m \cdot s}{s^2 \cdot m} = \frac{kg}{s}$

که بستگی به شکل هندسی دمپر و قطر سوراخ ها و نوع روغن دارد.

هرچه قدر c بزرگتر شود کمک تند قویتر شده یعنی جسم کمتر می‌شود.



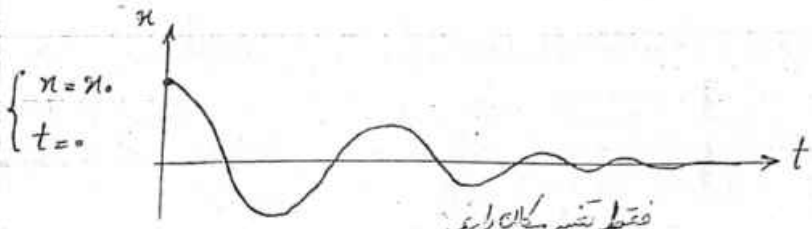
$\sum F = m\ddot{x}$

$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$

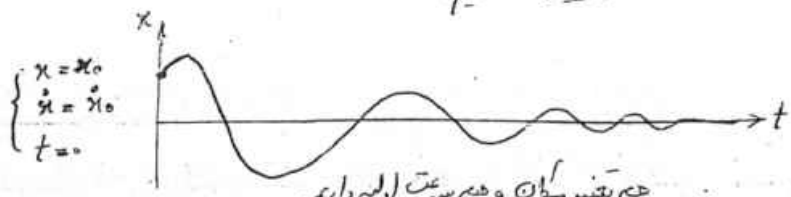
$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$ معادله دیفرانسیل حرکت

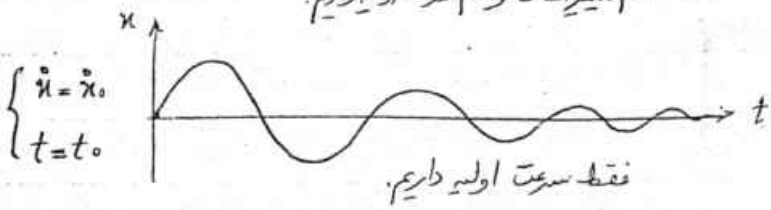
نکته: سه شکل زیر سیستم ارتعاشی میرا می‌باشند که به c بستگی دارند.



فقط تغییر مکان داریم.

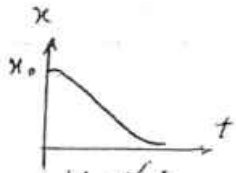


هم تغییر مکان و هم سرعت اولیه داریم.

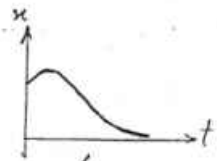


فقط سرعت اولیه داریم.

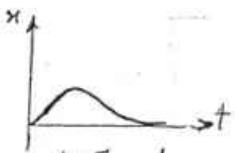
نکته: سه شکل زیر سیستم میرا ولی غیرارتعاشی می‌باشد که به c بستگی دارند.



با مکان اولیه



با سرعت و مکان اولیه



با سرعت اولیه

بلوار امامیه - بین ۳۷ و ۳۹
تلفن : ۶۶۴۳۳۵۱

برای حل معادله دیفرانسیل سیستم ارتعاشی میرایی یک معادله مشخصه تشکیل داده و یک تغییر متغیر انجام می‌دهیم:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

معادله مشخصه $r^2 + \frac{c}{m} r + \frac{k}{m} = 0 \longrightarrow \boxed{r_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}}$

تغییر متغیر $x = De^{rt} \Longrightarrow x = D_1 e^{r_1 t} + D_2 e^{r_2 t}$

معادله مکان بر حسب زمان (معادله پاسخ زمانی)

$$\boxed{x = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\left[D_1 e^{+\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\, t} + D_2 e^{-\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\, t}\right]}$$

اگر $\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ حقیقی باشد

I $\left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0\right)$

III $\left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0\right)$

پاسخ نهایی بدون ارتعاش به سمت صفر میل می‌کند

اگر $\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ حقیقی نباشد یعنی مجازی یا موهومی باشد

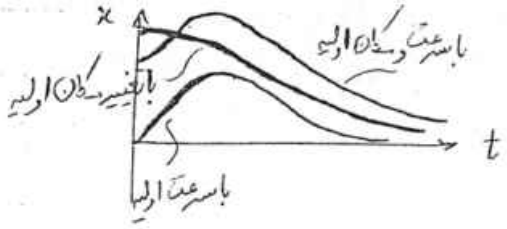
II $\left(\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0\right)$ پاسخ نهایی با ارتعاش به سمت صفر میل می‌کند

حالت I) $\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0 \Rightarrow c^2 > 4mk \Rightarrow c > 2\sqrt{mk}$

ثابت میرایی

حالت فرامیرا (over damping)

معادله پاسخ $x(t)$ برحسب زمان ارتعاشی نیست.



$$\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0 \Rightarrow c^2 < 4mk \Rightarrow c < 2\sqrt{mk}$$ (حالت II

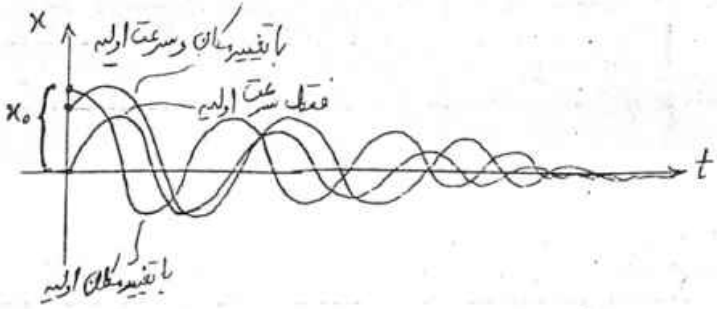
$$\sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}\right) i}$$ حالت فرومیرا (under damping)

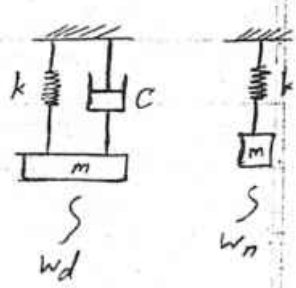
$$x = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[\underbrace{D_1 e^{\sqrt{k/m - c^2/4m^2}\cdot it} + D_2 e^{-\sqrt{k/m - c^2/4m^2}\cdot it}}_{A\cos w_d t + B\sin w_d t}\right]$$

$$w_d = \sqrt{k/m - \frac{c^2}{4m^2}}$$ ⟶ فرکانس زاویه‌ای حرکت اگر دمپر داشته باشد

این حالت در کمک فنر اتومبیل استفاده می‌شود.

$$x = e^{-c/2m\, t}\left[A\cos w_d t + B\sin w_d t\right]$$





فرکانس میرایی $w_d = \sqrt{k/m - \frac{c^2}{4m^2}}$

$$w_d < w_n$$

$$c = 0 \Rightarrow w_d = w_n$$

$$\frac{c^2}{4m^2}-\frac{k}{m}=0 \Rightarrow \frac{c^2}{4m^2}=\frac{k}{m} \Rightarrow c=2\sqrt{mk}$$ (حالت III)

$$x=e^{-\frac{c}{2m}t}\cdot(D_1+D_2t)$$

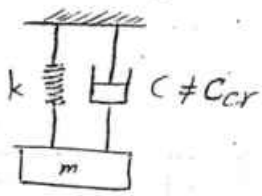
حالت میرایی بحرانی (Critical Damping)

سیستم بدون ارتعاش به سمت صفر میل می‌کند.
ولی سرعت میرا شدن آن بیشتر است و زمان کمتری را برای میرایی طی می‌کند (در حداقل زمان دامنه ارتعاش به صفر می‌رسد)

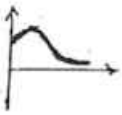
$C_{cr}=2\sqrt{mk}$ ثابت میرایی بحرانی

سرعت میرا شدن ارتعاشات سریعتر است. یعنی این حالت سریعترین حالت میرا شدن می‌باشد که سرعت میرایی نسبت به حالت فرامیرا (over damping) بیشتر می‌باشد ولی شکل همان است.

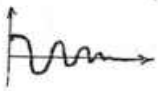
$$\boxed{\frac{c}{c_{cr}}=\beta \text{ نسبت میرایی}}$$



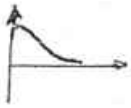
$\beta>1 \rightarrow$ حرکت فرامیرا over damping



$\beta<1 \rightarrow$ حرکت فرومیرا under damping



$\beta=1 \rightarrow$ حرکت میرایی بحرانی critical damping



نکته: اگر $c>c_{cr}$ زمان زیادی سپری می‌شود و حرکت ارتعاشی نیست.
و اگر $c<c_{cr}$ زمان زیادی سپری می‌شود ولی حرکت ارتعاشی است.

$$\beta=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{c}{2\sqrt{mk}}=\frac{c}{2mw_n} \qquad w_n^2=\frac{k}{m} \qquad c_{cr}=2mw_n$$

* نوشتن w_d برحسب w_n و β:

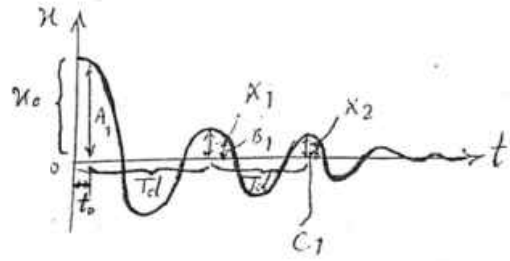
در حالت II) under damping فرومیرا

$$\Longrightarrow w_d=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}\left(1-\frac{c^2}{\underbrace{4mk}_{c_{cr}^2}}\right)}$$

$\beta=0 \Rightarrow w_d=w_n$ ارتعاش غیرمیرا

$$\Rightarrow w_d=w_n\sqrt{1-\beta^2}$$

(در حالت II)



$$w_d = 2\pi f_d = \frac{2\pi}{T_d}$$

$$\frac{X_1}{X_0} = ?$$

زمان نوسان $T_d = \frac{2\pi}{w_d} = \frac{2\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\frac{X_2}{X_1} = ?$$

* اگر نقاط مشابه که فاصله آن‌ها در روی محور t به اندازه T_d باشد با یکدیگر مقایسه کردند، نسبت دامنه‌هایشان چقدر خواهد بود؟

$$\frac{X_n}{X_{n-1}} = ?$$

معادله پاسخ $x = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[A\cos w_d t + B\sin w_d t\right]$

$$\begin{cases} x = A_1 \\ t = t_0 \\ A_1 = E.e^{-\frac{c}{2m}t_0} \end{cases}$$

$$t = t_0 + T_d$$

$$x = B_1$$

$$B_1 = e^{-\frac{c}{2m}(t_0+T_d)} \cdot (E)$$

$$B_1 = A_1 \cdot e^{-\frac{c}{2m}\cdot T_d}$$

$$t = t_0 + 2T_d$$

$$C_1 = A_1 \cdot e^{-\frac{c}{2m}\cdot 2T_d}$$

$$t_0 = 0 \longrightarrow X_0 = E' e^{-\frac{c}{2m}x_0} = E' = A$$

$$X_1 = X_0 e^{-\frac{c}{2m}\cdot T_d}$$

$$X_2 = X_0 e^{-\frac{c}{2m}\cdot 2T_d}$$

پس از n سیکل $\Longrightarrow$ $X_n = X_0 e^{-\frac{c}{2m}\cdot nT_d}$

نتایج:

۱- دامنه‌ها خودشان نسبت به هم به شکل متوالی یک ضریب ثابت را دارند.

$$\frac{X_n}{X_{n-1}} = e^{-\frac{c}{2m}\cdot T_d}$$

این تصاعد بنابراین توان منفی e کاهنده است.

$X_0, X_1, X_2, ---, X_{n-1}, X_n$ تصاعد هندسی

$$\boxed{\text{قدر نسبت} = e^{-c/2m\cdot T_d} = e^{-\delta} < 1}$$

$$\boxed{X_2 < X_1 \ , \ X_n < X_{n-1}}$$

۲- تعیین کاهش لگاریتمی:

$$\ln X_n = \ln X_0 - \frac{c}{2m}\cdot nT_d$$

$$\underbrace{\frac{c}{2m}\cdot T_d = \delta}_{\text{کاهش لگاریتمی}} \Longrightarrow \ln X_n - \ln X_0 = -n\delta$$

$$\ln\left(\frac{X_n}{X_0}\right) = -n\delta$$

هرچه قدر δ بزرگتر باشد سیستم سریعتر کاهش می‌یابد و بالعکس.

$$\boxed{X_n = X_0 e^{-n\delta}}$$

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{X_0}{X_n}}$$

$$\delta = \ln\frac{X_0}{X_1} = \frac{1}{2}\ln\frac{X_0}{X_2} = \frac{1}{3}\ln\frac{X_0}{X_3} = ----$$

اگر تساوی مقابل برای δ درست باشد صحیح است.

$$\boxed{e^{-\delta} \text{ قدر نسبت تصاعد هندسی}}$$

ارتباط بین β و δ:

$$\frac{c}{2m}\cdot T_d = \delta \Longrightarrow \frac{c}{2m}\cdot\frac{2\pi}{w_d} = \delta$$

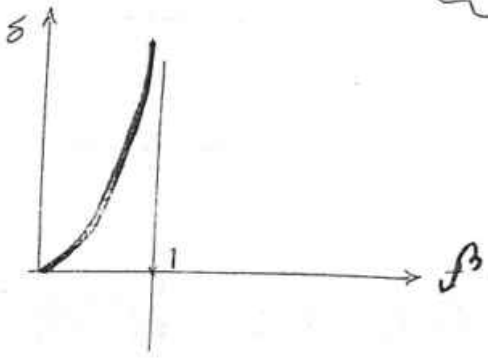
$$\Longrightarrow \frac{c}{2m}\cdot\frac{2\pi}{w_n\sqrt{1-\beta^2}} = \delta \longrightarrow \beta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2mw_n}$$

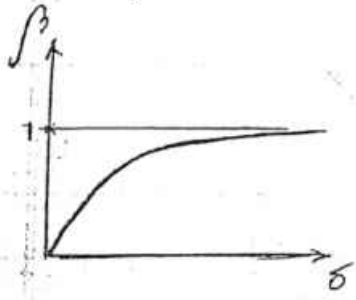
$$\Rightarrow \delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \delta^2(1-\beta^2) = 4\pi^2\beta^2$$

$$\beta^2(4\pi^2+\delta^2) = \delta^2 \Rightarrow \beta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta}}$$

$$\begin{cases} \beta \to 0 \\ \delta \to 0 \end{cases}$$ غیرمیرا

$$\begin{cases} \beta \to 1 \\ \delta \to \infty \end{cases}$$ میرایی بحرانی





توجه: δ پارامتر طراحی در دمپرهاست. مثلاً

$$\begin{cases} \delta \simeq 4 & \text{دمپر نو در اتومبیل} \\ \delta \simeq 2 & \text{دمپر کهنه} \end{cases}$$

مثال: یک دستگاه مرتعش میرا به جرم $m = 2.267\ kg$ و سختی $k = 17.5\ N/cm$ دارای دو دامنه متوالی با نسبت $\frac{1}{0.98}$ است. مطلوبست الف): محاسبه کاهش لگاریتمی (δ) و نیز نسبت میرایی (β)

(ب) فرکانس طبیعی (W_n) و فرکانس میرایی (W_d) (ج) ثابت میرایی (C)

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{X_0}{X_n} = \frac{1}{1}\ln\frac{1}{0.98} = 0.0202$$

$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} \simeq \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2}} = \frac{\delta}{2\pi} = 0.00315$$

* اگر $\delta \ll 1$ باشد یعنی در حد صفر می‌توان از δ^2 در زیر رادیکال صرف نظر کرد.

$$W_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{1750}{2.267}} = 27.78\ \frac{rad}{s} \simeq W_d$$

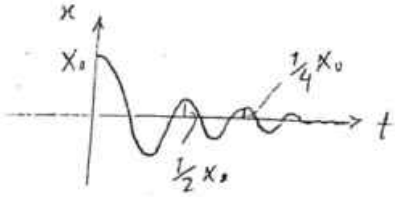
* اگر β در حد هزارم باشد $W_n \simeq W_d$ برابر می‌شود.

$$C = \underbrace{2mW_n}_{C_{cr}} \cdot \beta = 0.465\ \frac{N.s}{m}$$

مثال: نسبت دامنه های متوالی 2:1 است و β را بدست آورید.

$$\delta = \frac{1}{1}\ln\frac{2}{1} = 0.693$$

$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = 0.11$$



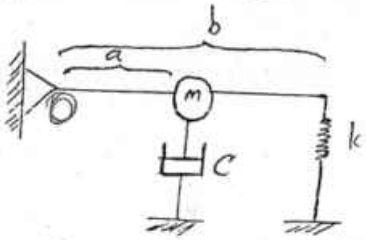
با توجه به نسبت 2:1

مثال: $\beta = 0.5$ نسبت دامنه های متوالی را بدست آورید.

$$\delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{1}\ln\frac{X_0}{X_1} = 3.62$$

$e^{-\delta}$ قدر نسبت $\qquad 36.7:1$

مثال: معادله دیفرانسیل حرکت، فرکانس طبیعی، فرکانس میرایی و ثابت میرایی بحرانی را بدست آورید.

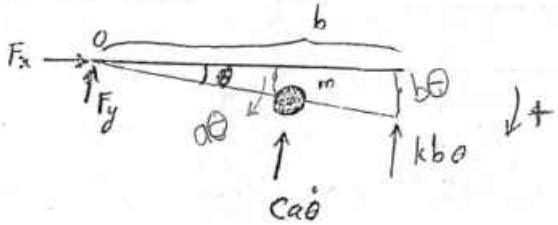


میله بدون جرم - نوع حرکت دورانی است و تغییر مکان قند و دمپر مساوی نیست.

حل: $\sum M_o = I_o\ddot{\theta}$

$$-kb^2\theta - ca^2\dot{\theta} = ma^2\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{k}{m}\cdot\frac{b^2}{a^2}\theta = 0}$$



در حالت استاندارد:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

ضریب x

$$\omega_n = \sqrt{k/m}, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

(نصف ضریب $\dot{x}$)

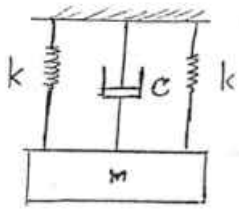
ω_d را دیکال $= 0 \Rightarrow C_{cr} = \dots$

در مسئله فعلی:

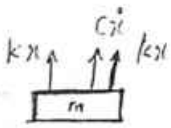
$c = 0$ فرض می‌کنیم دمپر نیست $\Longrightarrow$ $\boxed{\omega_n = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{k}{m}}}$, $\boxed{\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m}\cdot\frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{4m^2}}}$

زیر رادیکال صفر $\xrightarrow[c \to c_{cr}]{\omega_d}$ $\frac{k}{m}\frac{b^2}{a^2} - \frac{c_{cr}^2}{4m^2} = 0 \longrightarrow \boxed{C_{cr} = \frac{2b}{a}\sqrt{km}}$

مثال: معادله پاسخ $(x(t))$ را بدست آورید.



$$\begin{cases} W = 40\ lb \\ k = 25\ lb/in \\ C = 0.85\ \frac{lb \cdot s}{in} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 0 \\ \dot{x} = 4\ in/s \\ x = 0 \end{cases}$$



$$-kx - c\dot{x} - kx = m\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

$$m = \frac{40}{32.2}\ slug \quad , \quad k_{eq} = 2k$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad k \to lb/ft \quad m \to slug \quad \omega_n \to \frac{rad}{s}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{\overbrace{2 \times 25}^{\text{دو فنر}} \times \overbrace{12}^{\text{تبدیل به ft}} \times \overbrace{32.2}^{g \text{ در سیستم انگلیسی}}}{40}} = 22\ \frac{rad}{s}$$

$$C = 0.85 \times 12$$

$$\beta = \frac{c}{2m\omega_n} = 0.181 < 1 \Longrightarrow \text{under damping (فرومیرا)}$$

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)$$

$$-\frac{c}{2m} = -\beta \cdot \omega_n \qquad \beta \cdot \omega_n = 3.98$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\beta^2} = 22\sqrt{1-0.181^2} = 21.6\ \frac{rad}{s}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 0 \\ \dot{x} = 4\ in/s \end{cases} \Longrightarrow \boxed{A = 0}$$

$$\dot{x} = -3.98\,e^{-3.98t}\left(A\cos 21.6t + B\sin 21.6t\right)$$
$$+ 21.6\,e^{-3.98t}\left(-A\sin 21.6t + B\cos 21.6t\right)$$

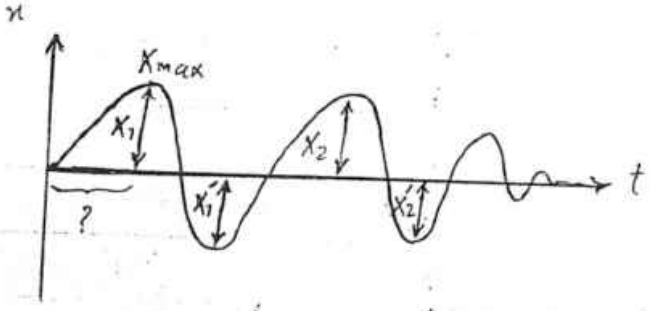
$\Rightarrow \boxed{B = 0.185}$

جواب معادلهٔ حرکت یا معادلهٔ پاسخ برحسب انچ

$$\boxed{x = 0.185\, e^{-3.98t} \cdot \sin 21.6t}$$

معادله سرعت

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} = &-3.98 e^{-3.98t}\left(0.185 \sin 21.6\, t\right) \\ &+ 21.6 e^{-3.98t}\left(0.185 \cos 27.6t\right)\end{aligned}}$$

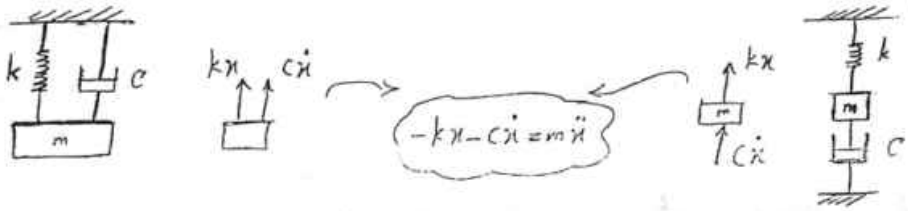


سؤال: در چه زمانی جرم به حداکثر دامنه خود می‌رسد و حداکثر آن را حساب کنید.

(نسبت به زمان مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.)

و همچنین مطلوبست تعیین مقادیر X_1 ، X_1' ، X_2 و X_2' ؟

نکته : تعیین معادله حرکت در حالتی که فنر و دمپر بصورت موازی قرار گرفته باشند یا بصورت سری باتوجه به شکل یکسان است . همچنین باید توجه داشت که دمپر و فنر باید تغییر طول یکسان داشته باشند و جهتشان نیز یکی باشد .



مثال : برای سیستم مرتعش میرا مقادیر ذیل مفروض است :

$k=8000\ N/m$ ، $m=10\ kg$ ، دامنه اولین سیکل ($X_0=64\ mm$) ، دومین سیکل ($X_1=48\ mm$) ، سومین سیکل ($X_2=36\ mm$) و چهارمین سیکل ($X_3=27\ mm$) .

برای سیستم فوق فرکانس طبیعی ، فرکانس میرایی ، ثابت میرایی ، ثابت میرایی بحرانی و کاهش لگاریتمی و نسبت میرایی (ζ) را بدست آورید .

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{8000}{10}}=28.28\ \frac{rad}{s} \quad , \quad C_{cr}=2m\omega_n=2\times 10\times 28.28$$

$$C_{cr}=565.6\ \frac{kg}{s}$$

$X_0 , X_1 , X_2 , X_3 , ---$

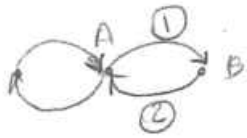
$64 , 48 , 36 , 27 , ---$ $\Rightarrow$ نسبت $e^{-\delta}=\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ $\delta=0.288$

$$\delta=\frac{1}{n}\ln\frac{X_0}{X_n}=\frac{1}{1}\ln\frac{X_0}{X_1}=\ln\frac{64}{48}=0.288$$

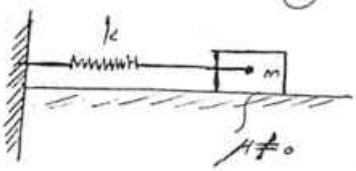
$$\zeta=\frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}}=\frac{0.288}{\sqrt{4\pi^2}}=0.046 \quad \Rightarrow \quad \zeta=\frac{c}{C_{cr}}$$

$$C=\zeta\times C_{cr}=0.046\times 565.6=26.02\ \frac{kg}{s} \quad , \quad \omega_d=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}=\sqrt{\frac{8000}{10}-\frac{26.02}{4\times 10}}$$

$$\omega_d=28.25\ \frac{rad}{s}$$



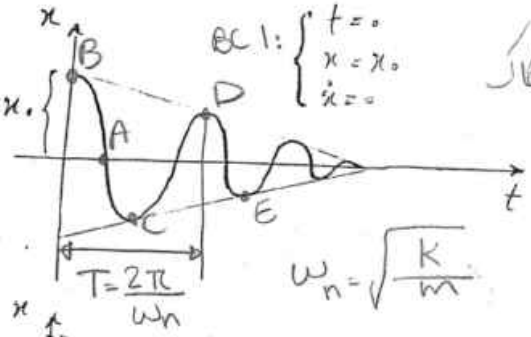
میرایی خشک یا کولمب :



در این میرایی از هیچ المانی استفاده نمی‌شود و تنها عامل میرایی اصطکاک بین جسم و زمین در حال خشک می‌باشد.

$F_f = \mu \cdot N$ ← عکس العمل عمودی سطح

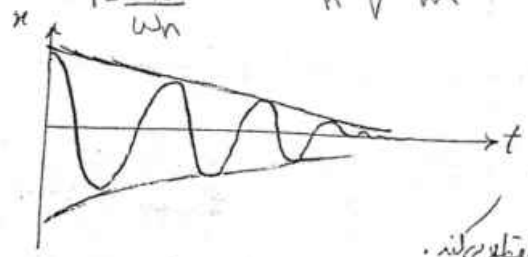
ضریب اصطکاک



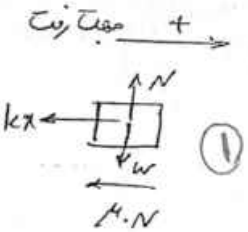
BC 1: $\begin{cases} t=0 \\ x=x_0 \\ \dot{x}=0 \end{cases}$

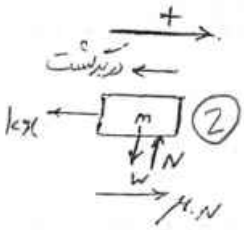
$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

* در میرایی خشک (کولمب) همانطور که در منحنی مقابل مشاهده می‌شود نوک دامنه‌ها را به همدیگر متصل کنیم یک خط راست از همه آنها می‌گذرد و محور افقی را قطع می‌کند.



* در میرایی لزج همانطور که در منحنی مقابل مشاهده می‌شود نوک دامنه‌ها با خطی منحنی به همدیگر متصل می‌شود و محور افقی را قطع نمی‌کند بهمین دلیل تعداد سیکل‌ها بینهایت است ولی در حالت واقعی چون میرایی لزج با میرایی خشک همراه است (یعنی اصطکاک) بالاخره محور افقی را قطع می‌کند.





* در میرایی لزج با یک معادله دیفرانسیل می‌توان حرکت رفت و برگشت را تشریح و مدل کرد ولی در میرایی خشک برای تشریح حرکت در یک سیکل برای رفت و برگشت نیاز به حل دو معادله دیفرانسیل داریم. (چون جهت نیروی اصطکاک متفاوت است.)

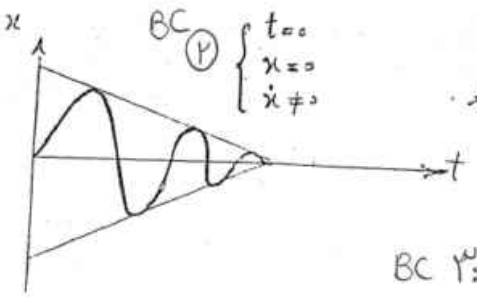
$-kx - \mu \cdot N = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + kx = -\mu \cdot N$

$-kx + \mu N = m\ddot{x}$

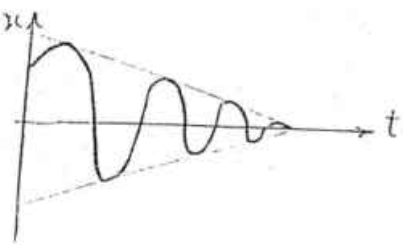
$m\ddot{x} + kx = \mu \cdot N$

* معادلات فوق در سیکل‌های بعدی دارای شرایط مرزی متفاوت خواهند شد و بایستی مجدداً حل شوند.



BC ۲ $\begin{cases} t=0 \\ x=0 \\ \dot{x}\neq 0 \end{cases}$

BC ۳: $\begin{cases} t=0 \\ x\neq 0 \\ \dot{x}\neq 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} ① \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{\mu \cdot N}{m} & \text{معادله رفت} \\ ② \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{\mu \cdot N}{m} & \text{معادله برگشت} \end{cases}$$

جوابی که اگر در معادله می‌گذاریم صدق کند.

$$\begin{cases} A \to B \quad \text{رفت} \quad ① \quad x_1 = \overbrace{A_1 \cos w_n t + B_1 \sin w_n t}^{\text{حل عمومی}} - \underbrace{\frac{\mu \cdot N}{k}}_{\text{حل خصوصی}} \\ B \to A \quad \text{برگشت} \quad ② \quad x_2 = A_2 \cos w_n t + B_2 \sin w_n t + \frac{\mu \cdot N}{k} \end{cases}$$

پاسخ حرکت همان در کاس طبیعی است.

* چون دامنه های سیکل تشکیل تصاعد حسابی می دهند برای یافتن قدر نسبت تصاعد با شرایط مرزی زیر داریم:

در مسیر اول کولمب

B نقطه‌ی B.C)$_1$ $\begin{cases} t = 0 \\ x = x_0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{cases}$ (برگشت) $x_1 = A_1 \cos w_n t + B_1 \sin w_n t + \frac{\mu \cdot N}{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = x_0 - \frac{\mu \cdot N}{k} \\ B_1 = 0 \end{cases}$$

اگر از طرفی مشتق را مساوی صفر قرار دهیم

B.C)$_1$ با شرایط مرزی معادله از B به A $\Rightarrow$ $x_1 = \left(x_0 - \frac{\mu \cdot N}{k}\right) \cos w_n t + \frac{\mu N}{k}$ (I)

$\dot{x} = -\left(x_0 + \frac{\mu N}{k}\right) \sin w_n t$

نقطه‌ی C.

(I) در معادله‌ی t $\xrightarrow{}$ B.C)$_2$ $\begin{cases} t = \frac{\pi}{w_n} \\ x = -x_0 + 2\frac{\mu \cdot N}{k} \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$ (رفت) $x_2 = A_2 \cos w_n t + B_2 \sin w_n t - \frac{\mu \cdot N}{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 = x_0 - 3\frac{\mu \cdot N}{k} \\ B_2 = 0 \end{cases}$$

معادله از C به D

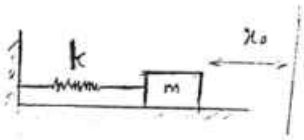
B.C)$_2$ با شرایط مرزی $\Rightarrow$ $x_2 = \left(x_0 - 3\frac{\mu \cdot N}{k}\right) \cos w_n t - \frac{\mu \cdot N}{k}$ (II)

نقطه‌ی D

(II) در معادله‌ی t $\xrightarrow{}$ B.C)$_3$ $\begin{cases} t = \frac{2\pi}{w_n} \\ \dot{x} = 0 \\ x = x_0 - \frac{4\mu N}{k} \end{cases}$ (برگشت) $x_3 = A_3 \cos w_n t + B_3 \sin w_n t + \frac{\mu \cdot N}{k}$

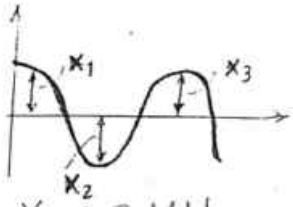
$$\Rightarrow \begin{cases} A_3 = x_0 - 5\frac{\mu \cdot N}{k} \\ B_3 = 0 \end{cases}$$

E به D از معادله‌ی B.C)$_3$ با شرایط مرزی $\Rightarrow$ $x_3 = \left(x_0 - 5\frac{\mu \cdot N}{k}\right) \cos w_n t + \frac{\mu \cdot N}{k}$ (III)



اختلاف دامنه‌های متوالی که از صفحه قبل در یک طرف هستند نشان‌دهنده قدر نسبت تماعد

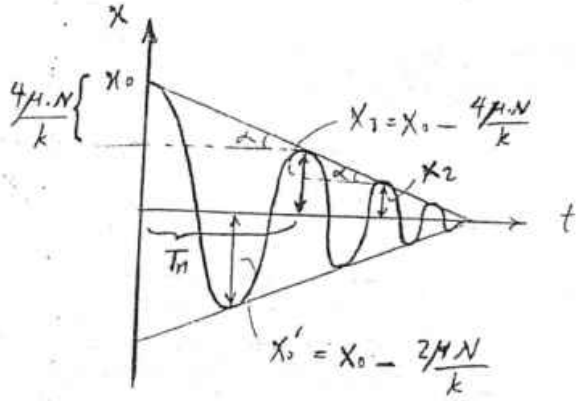
$$\Rightarrow \boxed{X_1 - X_3 = 4\frac{\mu \cdot N}{k}}$$



$$X_n - X_{n+2} = 4\frac{\mu \cdot N}{k}$$

$$X_1 - X_2 = 2\frac{\mu N}{K}$$

قدر نسبت تماعد حسابی $= X_{n+2} - X_n = -4\frac{\mu \cdot N}{K}$



$$tag\alpha = \frac{X_0 - X_1}{T_n} = \frac{X_2 - X_1}{T_n}$$

T_n ثابت است چون W_n ثابت است.

$$T_n = \frac{2M}{W_n}$$

$$tag\alpha = \frac{(X_0 - X_1)\, W_n}{2M}$$

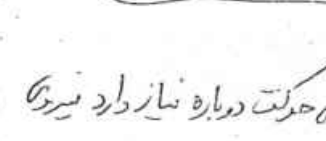
$$X_0 - X_1 = X_1 - X_2 = \text{---} = X_n - X_{n+1}$$

$X_0, X_1, X_2, \text{---}, X_n$ تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت منفی

$$X_0 - X_1 = \frac{4\mu \cdot N}{k} \Rightarrow tg\alpha = \frac{4\mu \cdot N \cdot W_n}{2Mk}$$

$$\boxed{tag\alpha = \frac{2\mu \cdot N \cdot W_n}{Mk}} \Leftarrow$$ شیب خط کاهش

نکته: زمانی که جسم حرکت رفت را انجام می‌دهد و برمی‌گردد و به تعادل می‌رسد برای حرکت دوباره نیاز دارد نیروی بیشتر از نیروی اصطکاک باشد بنابراین:



شرط حرکت $kX_n \geq \mu \cdot N \longrightarrow X_n \geq \frac{\mu \cdot N}{k}$

شرط توقف $X_n < \frac{\mu \cdot N}{k}$

تمرین: در یک سیستم میرای خشک با فرض مقادیر اختیاری برای جرم، سختی فنر، ضریب اصطکاک و شرایط اولیه به شکلی که حداقل قبل از توقف ۳ سیکل کامل قابل مشاهده باشد ضمن حل معادلات دیفرانسیل و بدست آوردن ثابت های انتگرال معادلات حاصل را رسم نموده و شیب خط کاهش را به کمک معادلات رسم شده و به کمک مقدار تئوری آن باهم مقایسه کنید و به همین ترتیب مقدار کاهش در دو دامنه متوالی را از روی شکل بدست آمده و مقدار تئوری آن باهم مقایسه کنید. مسئله یک بار با سرعت اولیه دلخواه و یک بار تغییر مکان اولیه دلخواه حل کنید.

$m \rightarrow$ 5 kg زیر

$k \rightarrow$ باری که حداقل ۳ سیکل بزند

$\mu \rightarrow$ 0.1 تا 0.3

(یکبار دستی و بار دیگر با کامپیوتر (نرم افزار Matlab) گراف آنرا ترسیم کنید.)

تمرین تحویلی: ارتعاش اجباری میرای خشک. با انتخاب مقادیر اختیاری برای μ ، m ، k ، مطلوبست:

۱) تغییر مکان اولیه ۲) سرعت اولیه

۳) تغییر مکان و سرعت اولیه

مسئله را حل کنید و دیاگرام مکان برحسب زمان را رسم نمایید.

✓ مقادیر به نحوی انتخاب شوند که حداقل ۳ سیکل کامل رسم شوند. (با مقیاس) (نرم افزاری / کاغذ میلیمتری)

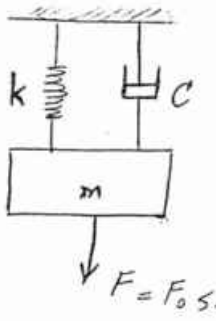
- تعداد نیم سیکل های لازم برای توقف کامل چیست؟

« فصل چهارم - ارتعاش اجباری میرا »

Damped- Forced

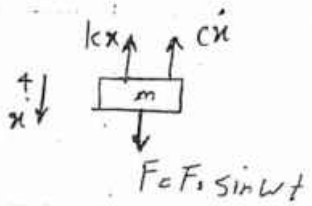
الف) اجباری میرا لزج

سیستم مقابل در اتومبیل بکار می رود.



حالت اول) F_0 مستقل از ω است.

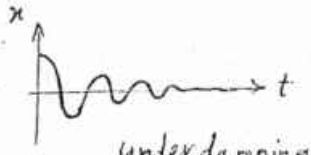
$\sum F = m\ddot{x}$



$$-kx - c\dot{x} + F_0 \sin wt = m\ddot{x}$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin wt} \quad (1)$$



فرض: سیستم بدون بار اجباری دارای ارتعاش است.

حالت underdamping (فرومیرا)

معادله پاسخ (حل معادله دیفرانسیل)

$$x = \underbrace{e^{-(c/2m)t}\left[A\cos w_d t + B\sin w_d t\right]}_{\text{پاسخ عمومی (گذرا) (همگن)}} + \underbrace{A'\cos wt + B'\sin wt}_{\text{پاسخ خصوصی (یکنواخت) دائم}} \quad (2)$$

نکته: پاسخ گذرا با گذشت زمان از بین می رود ولی پاسخ یکنواخت باقی می ماند. بخاطر جمله $\frac{c}{2m}t$

نکته: زمانی که $\boxed{\frac{c}{2m}t > 5}$ می توان از پاسخ گذرا صرف نظر کرد و فقط پاسخ یکنواخت را در نظر گرفت.

$$x = A'\cos wt + B'\sin wt \quad (3)$$

شرط درستی رابطهٔ (3) اینست که در معادلهٔ (1) صدق کند، بنابراین داریم:

اهداف این فصل: ۱) دامنه‌ی پاسخ یکنواخت را پیدا کنیم. فرکانس تحریک

۲) تغییرات دامنه‌ی پاسخ یکنواخت را نسبت به ω بررسی کنیم.

- در حالت ارتعاش دائم، فرکانس حرکت همان فرکانس تحریک است.

$$\dot{x} = -A'w \sin wt + B'w \cos wt$$

$$\ddot{x} = -A'w^2 \cos wt - B'w^2 \sin wt$$

در رابطه (1) قرار می‌دهیم $\Rightarrow$

$$\left(-A'w^2 \cos wt - B'w^2 \sin wt\right) + \frac{C}{m}\left(-A'w \sin wt + B'w \cos wt\right) + \frac{k}{m}\left(A' \cos wt + B' \sin wt\right) = \frac{F_0}{m} \sin wt$$

در طرفین باید ضرایب $\sin wt$ و $\cos wt$ یکسان باشد:

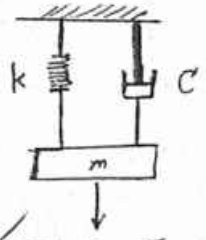
ضرایب $\sin wt$ و $\cos wt$

$$\begin{cases} -A'w^2 + B'\frac{C}{m}w + A'\frac{k}{m} = 0 \\ -B'w^2 - A'w\frac{C}{m} + B'\frac{k}{m} = \frac{F_0}{m} \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق ضرایب A' و B' بدست می‌آید:

$$\begin{cases} A' = \dfrac{F_0 C w}{m^2\left[\left(w_n^2 - w^2\right)^2 + \left(\frac{Cw}{m}\right)^2\right]} \\ B' = \dfrac{F_0\left(w_n^2 - w^2\right)}{m\left[\left(w_n^2 - w^2\right)^2 + \left[\frac{Cw}{m}\right]^2\right]} \end{cases}$$

$$X = \sqrt{A'^2 + B'^2}$$



$$x = A' \cos wt + B' \sin wt$$

$$x = X \sin(wt - \varphi)$$

دامنه حرکت $X = \sqrt{A'^2 + B'^2}$

بار تحریک $F = F_0 \sin wt$

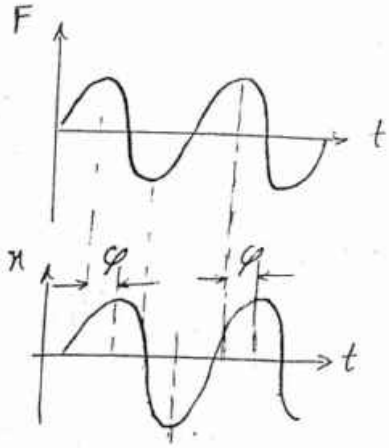
$$\boxed{\varphi = -\mathrm{Arctag}\frac{A'}{B'} \Leftarrow \mathrm{tag}\,\varphi = -\frac{A'}{B'}}$$

φ اختلاف فاز یعنی میزان عقب افتادگی تغییر مکان نسبت به نیرو

پاسخ تحریک

$$x = \underbrace{X \cos\varphi}_{B'} \sin wt - \underbrace{X \sin\varphi}_{A'} \cos wt$$

تایپ و تکثیر ...
بلوار امامیه - بین ۳۷ و ۳۹
تلفن: ۶۶۴۳۳۵۱



* دلیل عقب افتادگی تغییر مکان از نیرو دیر است.

$C = 0$ سیستم غیر میرا

$A' = 0$

$\varphi = 0$

نکته: F_0 تابع w نیست یعنی سیستم نوع اول (I) است.

$$\xi = \frac{C}{C_{cr}} \qquad X = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\frac{Cw}{m}\right)^2}} = \frac{F_0}{k\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{w}{w_n}\right)^2}}$$

$$C_{cr} = 2m\omega_n$$

$$\frac{w}{w_n} = r \Rightarrow \boxed{X = \frac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}}$$

دامنه ارتعاش کنترل نشده در حالت ارتعاش اجباری میرا با معیار لنج

$$\begin{cases} r \to 1 \text{ یا } w \to w_n \\ X \not\to \infty \end{cases}$$

در فرکانس اجباری دارای میرا هیچ وقت تشدید رخ نمی‌دهد

$$\begin{cases} r = 1 \\ X_{max} \end{cases}$$

رخ نمی‌دهد

$$\Rightarrow \overbrace{\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}}^{\text{بدون بُعد}} \qquad \begin{cases} r & \text{متغیر اصلی} \\ X & \text{تابع اصلی} \end{cases}$$

$$\frac{d\left(\frac{X}{F_0/k}\right)}{dr} = 0$$ فقط نوشتن مقدار زیر رادیکال کفایت می‌کند

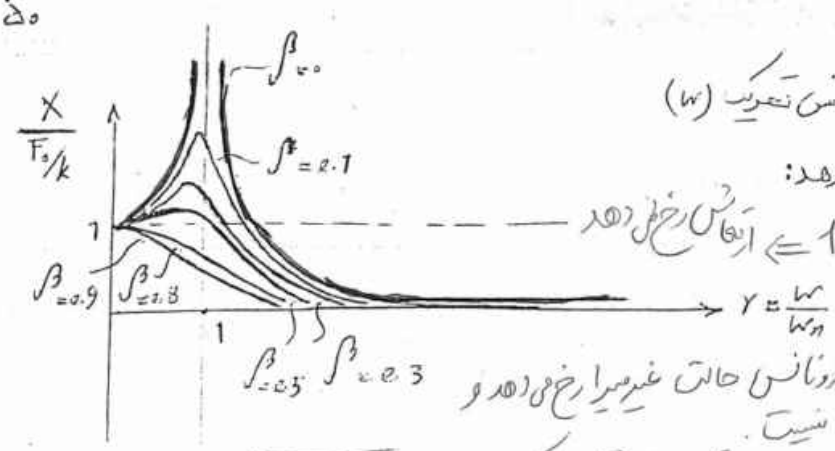
$$\Rightarrow 2(-2r)(1-r^2) + 2(2\xi)(2\xi r) = 0$$

$$-4r + 4r^3 + 8\xi^2 r = 0 \Rightarrow -1 + r^2 + 2\xi^2 = 0$$

$$r = \sqrt{1-2\xi^2}$$

$$r^2 = 1 - 2\xi^2 \longrightarrow \frac{w}{w_n} = \sqrt{1-2\xi^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{w = w_n\sqrt{1-2\xi^2}}$$ فرکانس نمودار بیشینه دامنه است.



* گراف مقابل تأثیر فرکانس تحریک (ω) را روی دامنه نشان می‌دهد:

اگر r نزدیک به 1 ⇐ ارتعاش رخ می‌دهد

* حداکثر دامنه قبل از رزونانس حالت غیرمیرا رخ می‌دهد و مقدار آن بی‌نهایت نیست.

* دامنه (X) با تغییرات ζ و ω تغییر می‌کند.

نکته: در گراف فوق مشاهده می‌شود که با افزایش β پیک (اکسترمم) منحنی هم به سمت چپ می‌آید و هم پایین‌تر می‌رود.

** مختصات نقطه ماکزیمم در گراف

$$\begin{cases} r=\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{1-2\beta^2} \\ \left(\frac{X}{F_0/k}\right)_{max}=\frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

$$1-2\beta^2<0 \longrightarrow \beta^2<1/2$$

$$\beta<\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \beta\simeq\sqrt{0.7}$$

گراف تغییرات X برحسب r دارای نقطه اکسترمم هست.

نکته: هیچ وقت به ازای داشتن یک دمپر در ارتعاش اجباری میرا دامنه بی‌نهایت نداریم و دمپر قوی‌تر باعث کم شدن دامنه ارتعاش در سیستم اجباری می‌شود و زودتر نیز رخ می‌دهد.

نکته: تا وقتی منحنی دارای نقطه پیک (اکسترمم) است که $\beta<\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد و اگر $\beta>\frac{\sqrt{2}}{2}$ شود دیگر گراف اکسترمم ندارد.

نکته: در ارتعاش اجباری میرا $\omega\neq\omega_n$ و $\omega\neq\omega_d$ می‌باشد.

اگر $\omega=\omega_n \longrightarrow r=1 \Longrightarrow \frac{X}{F_0/k}=\frac{1}{2\beta}$

برای یک آزمایش ساده مقدار β بدست می‌آید.

$$\frac{1}{\beta}=\frac{2X}{F_0/k}$$

$$\boxed{\beta=\frac{F_0/k}{2X}}$$

$$x = X \sin(\omega t - \varphi)$$

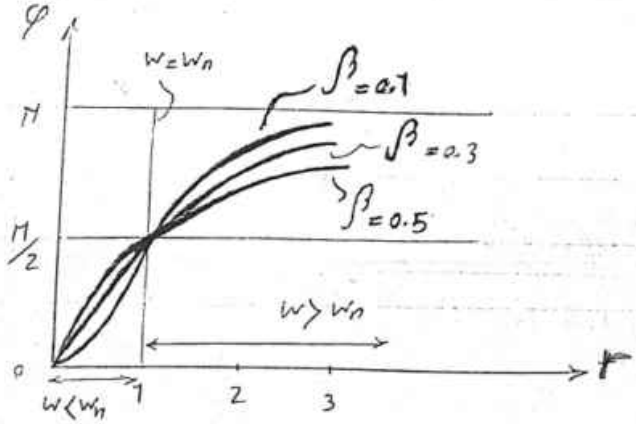
اختلاف فاز: میزان عقب ماندن تغییر مکان نسبت به نیروی اعمالی

$$\tan\varphi = -\frac{A'}{B'} = \frac{c\omega}{m(\omega_n^2-\omega^2)} = \frac{2\beta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

ثابت های انتگرال

$$\Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{2\beta r}{1-r^2}}$$

نکته: اگر سیستم دوران نکند (یعنی بار تحریک بار استاتیکی باشد نه بار دینامیکی) اختلاف فاز نداریم.

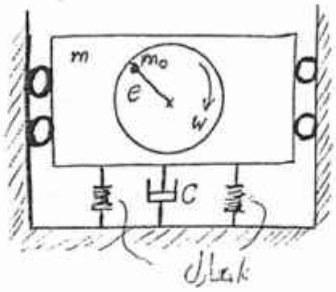


$$\begin{cases} r \to 0 \\ \varphi \to 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r \to 1 \\ \varphi \to \pi/2 \end{cases} \quad \begin{cases} r \to \infty \\ \varphi \to \pi \end{cases}$$

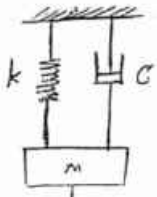
نکته: اگر $\omega = \omega_n$ شود اختلاف فاز برابر $\pi/2$ است.

نکته: قبل از رزونانس ($r=1$) کرافی که β بیشتر دارد اختلاف فاز بیشتری دارد و کرافی با β کمتر اختلاف فاز کمتری دارد و بعد از رزونانس ($r=1$) آنکه β بیشتری دارد اختلاف فاز کمتر و کرافی با β کمتر دارای اختلاف فاز بیشتری است.

ارتعاش اجباری میرا در اجسام نابالانس در حال چرخش (اثر دوران):



$\equiv$



$F = \underbrace{m_0 e w^2}_{F_0} \sin wt$

F_0 تابع w است.

هدف: تعیین دامنه‌ی پاسخ یکنواخت برحسب فرکانس تحریک

$F_0 = m_0 e w^2$

m_0 : جرم نابالانس

m : جرم کل سیستم

$w_n^2 = k/m \Rightarrow k = m w_n^2$

از قبل داریم: $X = \dfrac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \Longrightarrow X = \dfrac{m_0 e w^2}{k\sqrt{(1-r^2)+(2\xi r)^2}}$

$$X = \frac{F_0 \; m_0 e w^2}{\underbrace{k}_{m w_n^2}\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}$$

$$\Longrightarrow X = \frac{m_0 e \frac{w^2}{w_n^2} w_n^2}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \qquad w_n^2 \to \frac{k}{m}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}}$$

معادله تغییرات دامنه حرکت برحسب r و β در سیستم‌های دوار نابالانس میرا

$r \to 1$

$X \not\to \infty$

$\dfrac{dX}{dr} = 0$ باید حل شود $\Longrightarrow \dfrac{dX^2}{dr} = 0$ نقطه حداکثر تفاوتی نمی‌کند

$$\frac{m^2 X^2}{m_0^2 e^2} = \frac{r^4}{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}$$

$$\frac{dx}{dr}=0 \Rightarrow 4r^3\left[(1-r^2)^2+(2\beta r)^2\right]-r^4\left[2(-2r)(1-r^2)+2\times 2\beta\cdot 2\beta r\right]=0$$

$$4\left[1+r^4-2r^2+4\beta^2r^2\right]-\left[-4r^2+4r^4+8\beta^2r^2\right]=0$$

$$+4-8r^2+16\beta^2r^2+4r^2-8\beta^2r^2=0 \Rightarrow -r^2+2\beta^2r^2+1=0$$

$$r^2(2\beta^2-1)+1=0 \Rightarrow r^2=\frac{1}{1-2\beta^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2\beta^2}}=r$$

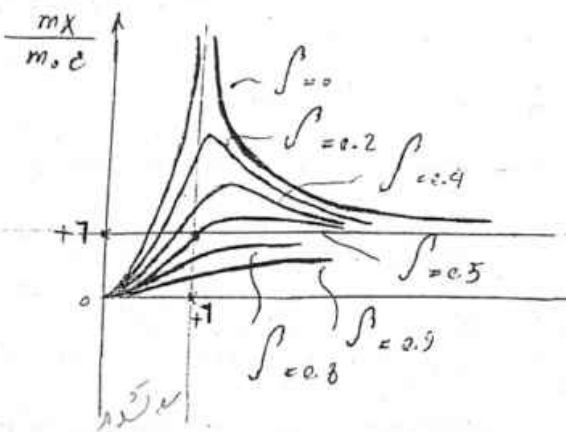
$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2=\frac{1}{1-2\beta^2} \Rightarrow \boxed{\omega=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\beta^2}}}$$

فرکانس حداکثر دامنه

نقش دمپر در اینجا علاوه بر جذب کردن ارتعاشات در $r\neq 1$ اجازه نمی‌دهد دامنه بینهایت شود $\beta\neq 0$

با وجود دمپر ضخیم x را باید اندازه شود.

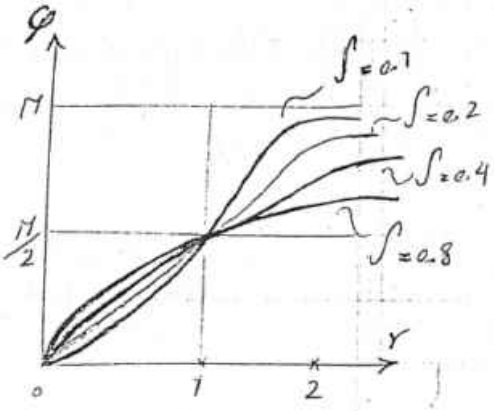
$$\text{(I)}\quad \boxed{\frac{mx}{m_0e}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}}$$



$$\begin{cases} F=F_0\sin\omega t=m_0e\omega^2\sin\omega t \\ x=X\sin(\omega t-\varphi)\end{cases}$$

معادله حرکت به اندازه φ از معادله نیروی عقب تر است. (اختلاف فاز)

$$\boxed{r=\frac{\omega}{\omega_n}} \qquad \varphi=f(r,\beta)$$



$$\left(\frac{mx}{m_0e}\right)_{max}=\frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}$$

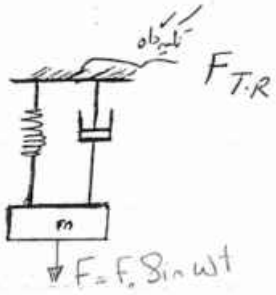
$$r=\frac{1}{\sqrt{1-2\beta^2}}$$

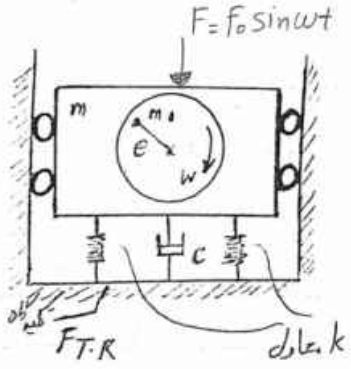
نقطه ماکزیمم

استاد جای این دو را با هم عوض کرده نوشت.

در معادله (I) گذاشتیم

* مقدار نیروی منتقل شده به کف یا تکیه‌گاه و جداسازی ارتعاش :





نسبت انتقال :

تعیین نیروی منتقل شده به زمین و تعیین نسبت انتقال در اثر ارتعاش اجباری اجسام (F_0 می‌تواند ثابت یا تابع w باشد)

$F_{T.R} = kx$ در حالت غیرمیرا

نیروی که به محل انتقال وارد می‌شود

$$T.R = \frac{F_{TR}}{F_*} \quad \text{(نسبت انتقال)}$$

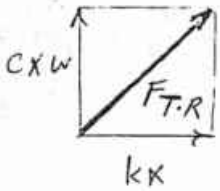
$$F_{T.R} = kx + c\dot{x} = kx \sin(wt - \varphi) + cxw \cos(wt - \varphi)$$ (دامنه بار متحرک)

$$\begin{cases} kx = kx \sin(wt - \varphi) \\ c\dot{x} = cxw \cos(wt - \varphi) \end{cases}$$

$$F_{T.R} = \sqrt{(k^2x^2) + (c^2w^2x^2)} = x\sqrt{k^2 + c^2w^2}$$

جداکننده نیروی منتقل شده به تکیه‌گاه (دامنه بار منتقل شده)

$$x = X \sin wt \longrightarrow \dot{x} = Xw \cos wt$$



$$A = \alpha \sin wt + \beta \cos wt$$

$$A_{max} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$T.R = \frac{F_{T.R}}{F_0 \text{ یا } m_0 e w^2}$$

I نوع — II نوع

مثلاً : سیستم نوع I

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$$

$$X = \frac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$$

$$X = \frac{m_0 e w^2}{k\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2}}$$

$$T.R = \frac{\sqrt{k^2x^2 + c^2w^2x^2}}{X.k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}$$

* برای سیستم نوع I و II داریم:

$$T.R = \frac{\sqrt{k^2 + c^2w^2}}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{c^2w^2}{k^2}}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}$$

$$\boxed{T.R = \frac{\sqrt{1+(2\beta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}}}$$

نسبت انتقال در سیستم اجباری میرا

(نوع I و نوع II)

(اثبات قرین کوکی)

(رجاعت F. تابع w و رجاعت F. ثابت)

$$\frac{c}{c_{cr}} = \beta \rightarrow k^2 = m^2w_n^4 \rightarrow c_{cr} = 2mw_n \Rightarrow c_{cr} = 2\sqrt{mk}$$

$$\frac{cw}{k} = \frac{c_{cr}\beta w}{m.w_n^2} \Rightarrow \frac{cw}{k} = \frac{2m.w_n.\beta.w}{m.w_n^2} = 2\beta r \Rightarrow \boxed{\frac{cw}{k} = 2\beta r}$$

نسبت جداسازی

$$\boxed{1 - T.R = I.R}$$ → Isolation Ratio

$r=1$

$$T.R = \frac{\sqrt{1+4\zeta^2}}{2\zeta} \Rightarrow \frac{d(T.R)^2}{dr} = 0$$

$$2\times 2\zeta\times 2\zeta r\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]-\left(1+4\zeta^2 r^2\right)\left[2(-2r)(1-r^2)+2\times 2\zeta\times 2\zeta r\right]=0$$

$$4\zeta^2\left[1+r^4-2r^2+4\zeta^2 r^2\right]-\left[-2+2r^2+4\zeta^2-8\zeta^2 r^2+8\zeta^2 r^4+16\zeta^4 r^2\right]=0$$

$$\Rightarrow 4\zeta^2+4\zeta^2 r^4-8\zeta^2 r^2+16\zeta^4 r^2+2-2r^2-4\zeta^2+8\zeta^2 r^2-8\zeta^2 r^4-16\zeta^4 r^2=0$$

$$\Rightarrow -4\zeta^2 r^4+2-2r^2=0$$

$$-2\zeta^2 r^4-r^2+1=0 \longrightarrow r^2=\frac{1\pm\sqrt{1+8\zeta^2}}{-4\zeta^2}$$

$$r^2=\frac{+\sqrt{1+8\zeta^2}-1}{4\zeta^2} \Longrightarrow r=\frac{\sqrt{\sqrt{1+8\zeta^2}-1}}{2\zeta}$$

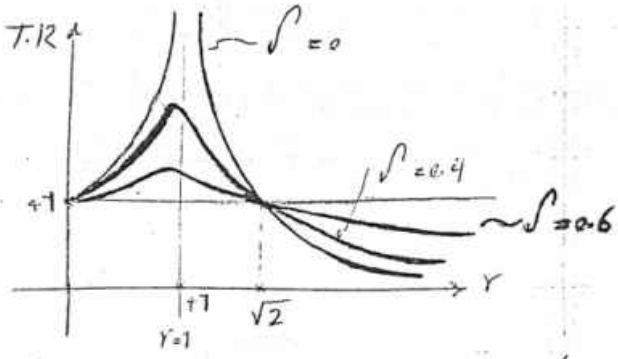
$$\boxed{W = W_n\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{1+8\zeta^2}-1}}{2\zeta}}$$

فرکانس حداکثر نیروی منتقله

$$\zeta=0 \longrightarrow \begin{cases} r\to 1 \\ T.R\to\infty \\ X\to\infty \end{cases}$$

دامنه و نیرو هر دو بینهایت می‌شوند

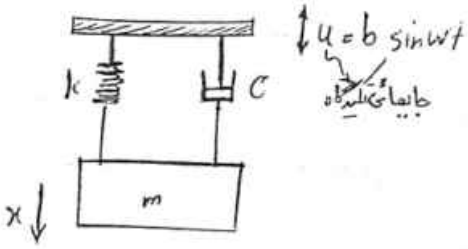
$$\zeta=1 \longrightarrow W=W_n\frac{\sqrt{3-1}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}W_n<W_n$$



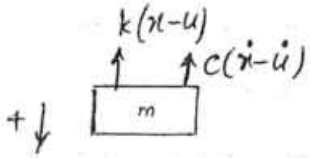
نکته: به ازای تمام میرایی‌ها اگر فرکانس بیشتر از $\sqrt{2}\,W_n$ شود نسبت انتقال از یک کمتر می‌شود. $(T.R<1)$

نکته: حداکثر دامنه قبل از رزونانس رخ می‌دهد.

حرکت ارتعاشی اجباری - میرا در اثر حرکت هارمونیک تکیه گاه :



کاربرد در ماشینهای سنگین و خودرو.
بار ارتعاشی به تکیه گاه وارد می شود.



$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$-k(x-u) - c(\dot{x}-\dot{u}) = m\ddot{x} \qquad (*)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{u} + ku$$

$$u = b\sin wt$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = cbw\cos wt + kb\sin wt$$

معادله دیفرانسیل حرکت برحسب x (تغییر مکان جسم)

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{cbw}{m}\cos wt + \frac{kb}{m}\sin wt$$

تغییر طول فنر $z = x - u \longrightarrow \ddot{z} = \ddot{x} - \ddot{u} \longrightarrow \dot{z} = \dot{x} - \dot{u}$

در معادله * $\Rightarrow -kz - c\dot{z} = m(\ddot{z} + \ddot{u}) \Rightarrow m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{u}$

$$u = b\sin wt \longrightarrow \dot{u} = bw\cos wt \longrightarrow \ddot{u} = -bw^2\sin wt$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = mbw^2\sin wt \qquad (**)$$

معادله دیفرانسیل حرکت برحسب z (تغییر طول فنر)

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = bw^2\sin wt$$

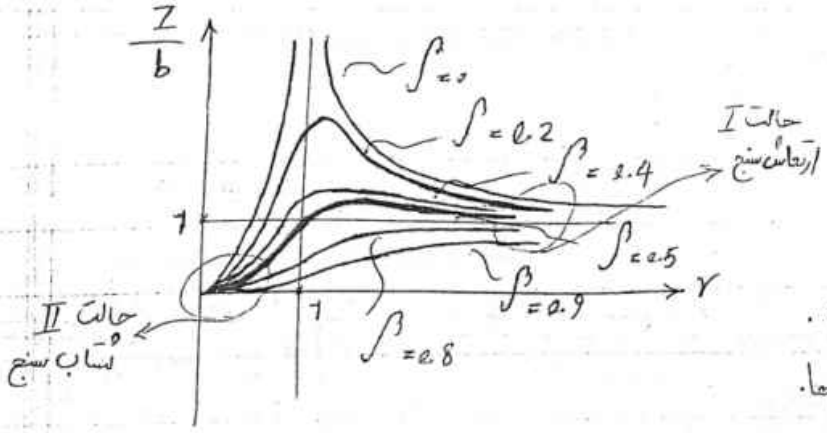
$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 e w^2 \sin wt}$$ ⇐ معادله (**) مشابه شود با

تبدیل‌ها
$$\begin{cases} x \to Z \\ X \to Z \\ m_0 \to m \\ e \to b \end{cases}$$

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$$\boxed{\frac{mZ}{mb} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$$

$\frac{\text{دامنه تغییر طول فنر}}{\text{دامنه بار تحریک}}$



نقطه ماکزیمم $r = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$

* کاربرد نمودار در لرزه‌نگارهاست.
یعنی ارتعاش‌سنج‌ها و شتاب‌سنج‌ها.

مطالب گفته شده در مورد لرزه‌نگارها در فصل دوم در مورد طراحی ارتعاش‌سنج و شتاب‌سنج در اینجا نیز معتبر است.
به علاوه در این حالت مسئله کاملاً واقعی‌تر خواهد بود زیرا در عمل همیشه دستگاه‌های ارتعاش‌سنج و شتاب‌سنج دارای خاصیت دمپینگ می‌باشند چنانچه از نمودار رسم شده می‌توان دریافت در r های خیلی کوچک و r های خیلی بزرگ تمام نمودارهای حاصل از میراکننده‌های متفاوت کاملاً نزدیک به یکدیگر عمل می‌کنند.

تمرین تحویلی: اثبات کنید که در معادلهٔ دیفرانسیل حرکت در سیستم‌های ارتعاش‌سنج در هنگامی که تکیه‌گاه دچار حرکت هارمونیک شود چنانچه تغییر مکان جسم مجهول باشد:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{cb\omega}{m}\cos\omega t + \frac{kb}{m}\sin\omega t$$

دارای دامنه‌ای به شکل ذیل می‌باشد.

$$T.R. = \frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

ثابت کنید که در معادلهٔ دیفرانسیل حرکت در سیستم‌های ارتعاشی میرا در هنگامی که تکیه‌گاه دچار حرکت هارمونیک شود

چنانچه تغییر مکان جسم مجهول باشد $\left(\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{cbw}{m}\cos wt + \frac{kb}{m}\sin wt\right)$ (7)

دارای راه‌حلی به شکل ذیل می‌باشد:

$$\boxed{\frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$$

معادلهٔ مشخصه: $p^2 + \frac{c}{m}p + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow p = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

$$p = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}\right)i^2} = \frac{-c}{2m} \pm i\sqrt{w_n^2\left(1-\left(\frac{c}{2mw_n}\right)^2\right)}$$

$$p = \frac{-c}{2m} \pm i w_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad , \quad w = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{-c}{2m} \pm iw$$

بنابراین معادلهٔ پاسخ حرکت بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$x = \underbrace{e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A\cos wt + B\sin wt\right)}_{\text{پاسخ عمومی (گذرا)}} + \underbrace{A'\cos wt + B'\sin wt}_{\text{پاسخ یکنواخت یا دائمی (خصوصی)}} \qquad (2)$$

می‌توان بدلیل میرا شدن از پاسخ گذرا صرف‌نظر کرد چون با گذشت زمان پاسخ گذرا از بین می‌رود و البته این زمانی که $\frac{c}{2m}t > 5$ شود صادق است. و فقط پاسخ یکنواخت را در نظر گرفت:

$$x = A'\cos wt + B'\sin wt \qquad (3)$$

شرط درستی رابطهٔ (3) اینست که در معادلهٔ (7) صدق کند بنابراین داریم:

$$\dot{x} = -A'w\sin wt + B'w\cos wt$$

$$\ddot{x} = -A'w^2\cos wt - B'w^2\sin wt$$

در معادلهٔ (1) قرار می‌دهیم $\Rightarrow$

$$-A'w^2\cos wt - B'w^2\sin wt - \frac{c}{m}A'w\sin wt + \frac{c}{m}B'w\cos wt + \frac{k}{m}A'\cos wt + \frac{k}{m}B'\sin wt = \frac{cbw}{m}\cos wt + \frac{kb}{m}\sin wt.$$

شرط تساوی آنست که ضرایب $\sin wt$ و $\cos wt$ در طرفین باهم برابر باشد :

$$\begin{cases} -A'w^2 + B'\dfrac{cw}{m} + A'\dfrac{k}{m} = \dfrac{cbw}{m} \\[2ex] -B'w^2 - A'\dfrac{cw}{m} + B'\dfrac{k}{m} = \dfrac{kb}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'(w_n^2 - w^2) + B'\left(\dfrac{cw}{m}\right) = \dfrac{cbw}{m} \\[2ex] B'(w_n^2 - w^2) + A'\left(-\dfrac{cw}{m}\right) = \dfrac{kb}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B' = \dfrac{b\left[w_n^2(w_n^2 - w^2) + \left(\dfrac{cw}{m}\right)^2\right]}{(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\dfrac{cw}{m}\right)^2} \\[2ex] A' = \dfrac{-bcw^3}{m\left[(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\dfrac{cw}{m}\right)^2\right]} \end{cases}$$

$$X = \sqrt{A'^2 + B'^2} = \sqrt{\frac{b^2(cw^3)^2}{m^2\left[(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]^2} + \frac{b^2\left[w_n^2(w_n^2 - w^2) + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]}{\left[(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{b^2(cw^3)^2 + b^2 m^2\left[w_n^2(w_n^2 - w^2) + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]^2}{m^2\left[(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]^2}}$$

$$X = \sqrt{\frac{b^2 m^2\left[\left(\frac{cw^3}{m}\right)^2 + \left[w_n^2(w_n^2 - w^2) + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]^2\right]}{\cancel{m^2}\left[(w_n^2 - w^2)^2 + \left(\frac{cw}{m}\right)^2\right]^2}}$$

$$\frac{X}{b} = \sqrt{\frac{\left(\frac{cw^3}{m}\right)^2 + \left[w_n^4\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right) + w_n^4\left(\frac{cw}{m w_n^2}\right)^2\right]^2}{\left[w_n^4\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + w_n^4\left(\frac{cw}{m w_n^2}\right)^2\right]^2}}$$

$$\frac{X}{b} = \sqrt{\frac{\cancel{w_n^8}\left[\left(\frac{cw^3}{m w_n^4}\right)^2 + \left(\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right) + \left(\frac{cw}{m w_n^2}\right)^2\right)^2\right]}{\cancel{w_n^8}\left[\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(\frac{cw}{m w_n^2}\right)^2\right]^2}}$$

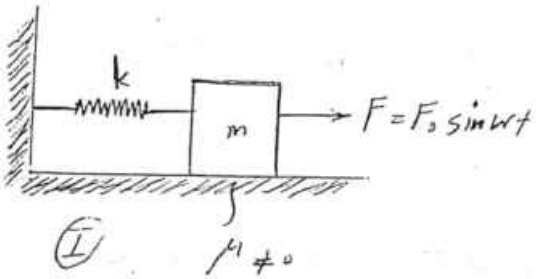
$$\frac{X}{b} = \sqrt{\frac{r^4(2\zeta r)^2 + \left[(1 - r^2) + (2\zeta r)^2\right]^2}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^2}}$$

$$\frac{X}{b} = \sqrt{\frac{\left(1 + (2\zeta r)^2\right)\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^2}}$$

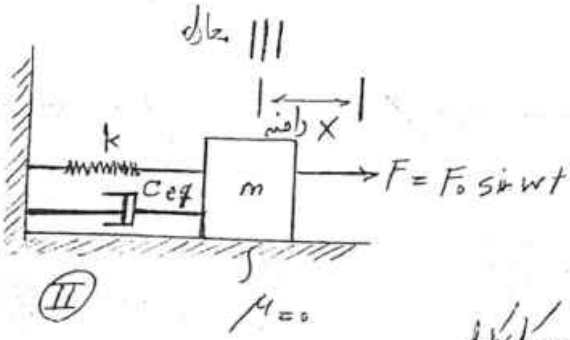
و به این ترتیب رابطه بدست می‌آید:

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{X}{b} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}}$$

حرکت ارتعاش اجباری میرا در میراکننده های خشک (کولمب) :



چون این مسئله یک حرکت غیرخطی دارد باید برای حل از یک روش معادل سازی استفاده کرد .



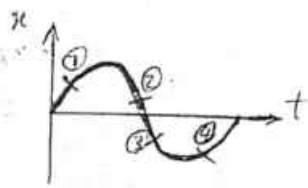
* میزان جذب انرژی در یک سیکل کامل

در هر دو سیستم I و II یکسان است بنابراین می‌توان دو سیستم را معادل کرده و یک Ceq بدست آورد و مسئله را مانند دمپر لزج حل کرد.

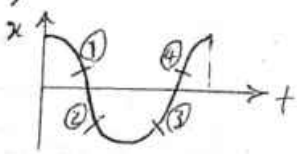
$$U_{(I)} = \int f\,dx = 4\mu N X$$

در یک سیکل کامل تبدیل به گرما می‌شود.

نیروی اصطکاک $f = \mu . N$



چون در هر سیکل ۴ ربع سیکل داریم بنابراین $U = 4\mu N X$:



$$U_{(II)} = \int f . dx = \int c\dot{x} . dx = \int_0^T c\dot{x}^2 dt = \int_0^{\frac{2\pi}{w}} c X^2 w^2 \cos^2(wt-\varphi)\,dt$$

چون نیروی اصطکاک صفر است $f = c\dot{x}$, $T = \frac{2\pi}{w}$

$$x = X \sin(wt-\varphi) \Rightarrow \dot{x} = X w \cos(wt-\varphi) \quad , \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

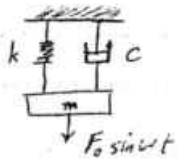
ادامه حل انتگرال $\Rightarrow$ $$U_{(II)} = c X^2 w^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2wt-2\varphi)}{4w} \right)_0^{\frac{2\pi}{w}} = c X^2 w \pi$$

$$U_{II} = CX^2 w^2 \cdot \frac{\pi}{w} = CX^2 \pi w$$

$$U_I = U_{II} \Longrightarrow 4\mu N X = C_{eq} X^2 \pi w \longrightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi X w}}$$

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

در ارتعاش اجباری لزج داشتیم ⇐

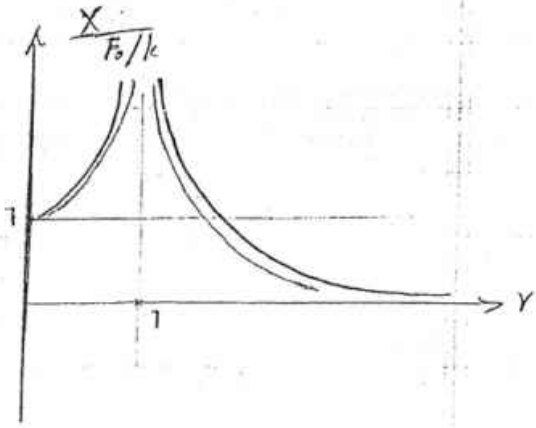


$$2\zeta r = 2\,\frac{C_{eq}}{C_{cr}} \cdot \frac{w}{w_n} = 2 \cdot \frac{4\mu N}{\pi X w} \cdot \frac{1}{\underbrace{C_{cr}}_{2 m w_n}} \cdot \frac{w}{\underbrace{w_n}_{k}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{2\zeta r = \frac{4\mu N}{\pi k X}}$$

$$\frac{X^2}{F_0^2/k^2} = \frac{1}{(1-r^2)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi k X}\right)^2} \Longrightarrow X^2 = \frac{(F_0/k)^2 - \left(\frac{4\mu N}{\pi k}\right)^2}{(1-r^2)^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{X}{F_0/k} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{(1-r^2)^2}}}$$

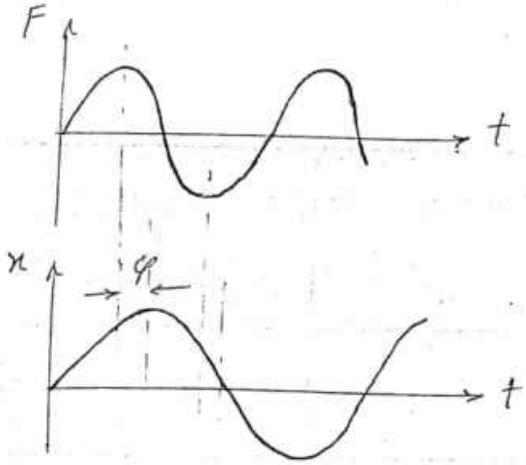


اگر $\left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2 < 1$ شود می‌توان سیستم ارتعاشی میرای کولمب را با میرای لزج مدل کرد در غیر اینصورت نمی‌توان مدل کرد.

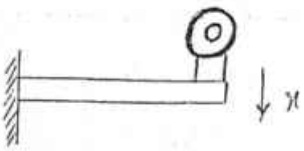
$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{4\mu N}{\pi F_0}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}}$$

φ میزان تعقب انحنای تغییر مکان نسبت به نیرو

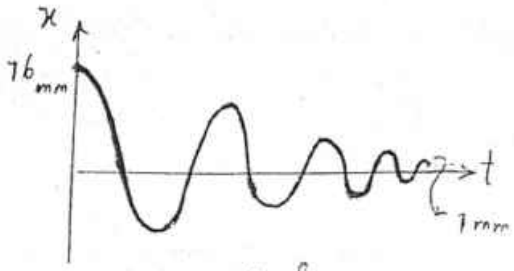
$$\begin{cases} x = X \sin(\omega t - \varphi) \\ F = F_0 \sin \omega t \end{cases}$$



مسئله ۱: یک موتور الکتریکی به جرم 25 kg بر روی یک تیر یکسر گیردار قرار دارد. این موتور جرم نابالانس است. اگر موتور به اندازه 16 mm جابجا شود ارتعاشات تیر در طی ۴ سیکل به یک میلیمتر می‌رسد. اگر موتور در حال کارکردن باشد مقدار کمیت بدون بُعد $\frac{mX}{m_0 e}$ را برای حالت تشدید بیابید.



$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$



ارتعاش میرا (غیر اجباری)

در زمان تشدید: فرکانس سیستم با فرکانس طبیعی سیستم برابر است. $\omega = \omega_n$

$$r = 1 \Rightarrow \frac{mX}{m_0 e} = \frac{1}{2\zeta}$$

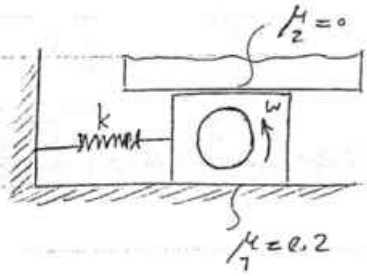
$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_0}{X_n} = \frac{1}{4} \ln \frac{16}{1} = 0.69$$

$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \Rightarrow \beta = 0.709$$ نسبت میرایی

$$\boxed{\frac{mX}{m_0 e} = 4.58}$$

نکته: در مسائل ارتعاش اجباری-میرا باید ابتدا یک حالت ارتعاش میرا (غیراجباری) را در نظر گرفت تا بتوان خاصیت damping سیستم را بدست آورد سپس به حالت ارتعاش اجباری-میرا حل کرد مثلاً در مسئله قبل ابتدا موتور را خاموش در نظر گرفته و ارتعاش تیر را بصورت میرا (غیراجباری) با نمودار x-t نشان می‌دهیم.

مسئله ۲: وقتی $\mu = 0$ باشد می‌توان سیستم را بر روی یک ریل قرار دارد (با روغن) تا اصطکاک صفر شود.



اگر $\mu_2 \neq 0$ بود $\Leftarrow$ $\mu_{کل} = \mu_1 + \mu_2$

در حالت ω_1 و ω_2 نیرو را محاسبه و تغییر مکان یا دامنه (X) را بدست آورید.

$k = 180\ N/m$

$m_0 = \frac{15}{4}\ kg$

$e = 2\ mm$

$m = 75\ kg$

$\omega_1 = 10\ rad/s$

$\omega_2 = 100\ rad/s$

$\omega_1 = 10\ rad/s$

$F_0 = m_0 e \omega^2 = \frac{15}{4} \times 0.002 \times 10^2$

$F_0 = 0.75\ N$

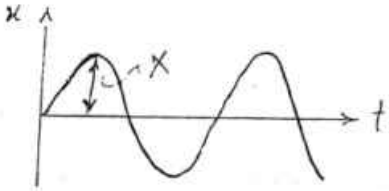
مقدار نیروی لازم برای راه‌اندازی سیستم $(\mu N = 0.2 \times 10 \times 75 = 30\ N)$

بنابراین $F_0 < \mu N$ و سیستم بدون حرکت باقی می‌ماند. $(X = 0)$

$\omega_2 = 100\ rad/s \Rightarrow F_0 = 75\ N > 30\ N$

بنابراین سیستم حرکت می‌کند و دامنه را می‌توان بدست آورد:

$$\left(\frac{X}{F_0/k}\right)^2 = \frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{(1 - r^2)^2}$$



$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{1800}{15} = 120 \quad \left(\frac{rad}{s}\right)^2$$

$$r^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = \frac{70.4}{120}$$

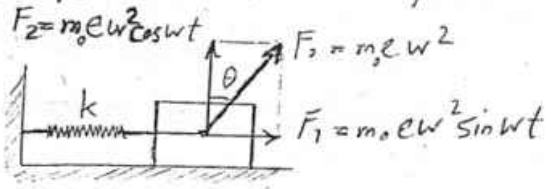
$$\left(\frac{X}{75/1800}\right)^2 = \frac{1-\left(\frac{4\times 0.2\times 15\times 10}{75\,m}\right)^2}{\left(1-\frac{70.4}{120}\right)^2} \Rightarrow \boxed{X = 0.44\ mm}$$

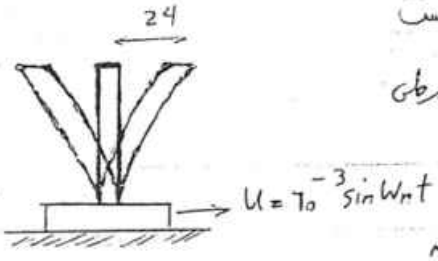
نکته: درباره این مسأله می‌توان با فرضیات جدید مسأله جدیدی را حل کرد و معادلات جدیدی برای X بدست آورد همچنین می‌توان مسائل جدیدی را مطرح کرد که در زیر عنوان می‌شود:

۱- فرض کنیم تمام وزن به کف وارد می‌شود و هیچ وزنی را قطعه بالایی تحمل نمی‌کند بنابراین $\mu_2 = 0$ بوده و باید یک معادله جدید نوشت و X را بدست آورد چون: ($U \neq 4\mu N X$ انرژی پتانسیل)

۲- فرض کنیم بخشی از وزن به کف وارد شده مثلاً $\frac{N}{2}$ و بخشی توسط قطعه بالایی تحمل می‌شود در اینصورت $\mu_2 \neq 0$ بوده و $U \neq 4\mu N X$ است و معادله جدیدی باید بدست آورد برای محاسبهٔ دامنه (X).

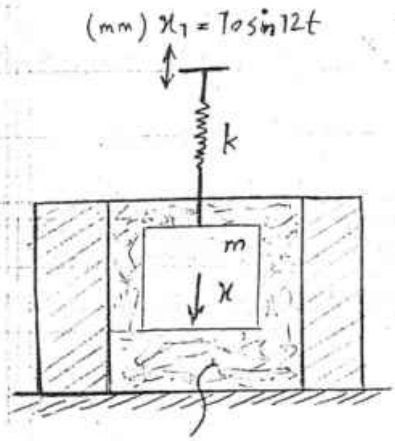
۳- فرض شود یا اینکه مسئله بصورتی باشد که قطعهٔ بالایی وجود نداشته باشد بنابراین یک نیروی گریز از مرکز F_0 داریم که به دو مؤلفه تجزیه می‌شود در یک نیم سیکل ($N + m_0 e\omega^2 \cos\omega t$) می‌شود و در نیم سیکل دیگر ($N - m_0 e\omega^2 \cos\omega t$) می‌شود.





مسئله 3 : در ارتعاشات آزاد یک تیر یکسر گیردار مشاهده شده است که دامنه در نوک تیر از 20 mm به نصف آن در طی 10 سیکل کاهش می‌یابد.

اگر باید تحت تأثیر یک ارتعاش هارمونیک با دامنه 1 mm (10^{-3} m) فرکانس لیبد دامنه قابل انتظار در حالت تشدید را بیابید.

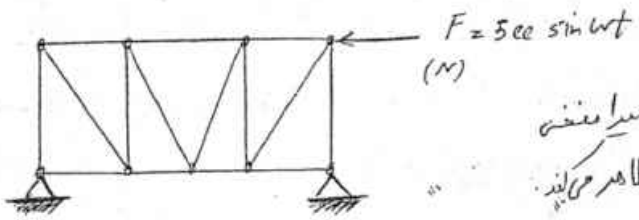


مسئله 4 : یک پیستون به جرم 4 kg با اصطکاک لزج درون یک استوانه می‌لغزد انتهای بالایی یک فنر کشان با یک حرکت هارمونیک برحسب میلیمتر حرکت داده می‌شود.

اگر ثابت فنر $400 \frac{N}{m}$ و ثابت میرایی $20 \frac{N.s}{m}$ فرض شود، بیشترین دامنه پیستون را محاسبه کنید.

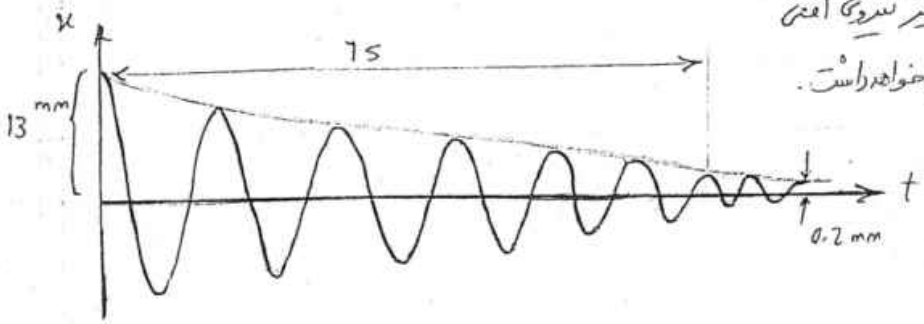
مانع لزج مانند روغن

مسئله 5 :



یک قاب بسته تحت تأثیر ارتعاشات آزاد میرا منحنی دامنه - زمان نشان داده شده را از خود ظاهر می‌کند.

می‌دانیم که قاب تحت تأثیر نیروی افقی 500N به اندازه 2 mm خیز خواهد داشت.



بلوار امامیه - بین ۳۷ و ۳۹
تلفن : ۶۶۴۳۳۵۱

اگر $\omega = 960\ rpm$ باشد و نیروی هارمونیک $F = 5\cos\sin\omega t$ برحسب نیوتن به سیستم وارد شود دامنه حرکت دستگاه چقدر است؟

در این مسئله ابتدا فرض کنید که میرایی دستگاه معادل یک سیستم لزج است و بار دوم میرایی دستگاه (مقادیر داده شده) معادل یک سیستم میرایی خشک است.

$X = ?$ ⟶ میرایی لزج

$X = ?$ ⟶ میرایی خشک

جواب مسأله 3 :

ارتعاش میرایی غیراجباری $\delta = \frac{1}{10}\ln\frac{20}{10} = \frac{1}{10}\ln 2 = 0.069$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = 0.011$$

$$\frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

در حالت تشدید $r = 1 \Rightarrow \frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2}}{2\zeta}$

$$\Rightarrow X = 1 \times \frac{\sqrt{1.022}}{0.022} = 46\ mm$$

جواب مسأله 5 :

$$k = \frac{50}{0.002} = 25\times10^4 \ N/m$$

$$\omega = 960 \times \frac{2\pi}{60} = 100.5 \ \frac{rad}{s} \quad , \quad \delta = \frac{1}{8}\ln\frac{13}{0.2} = 0.52$$

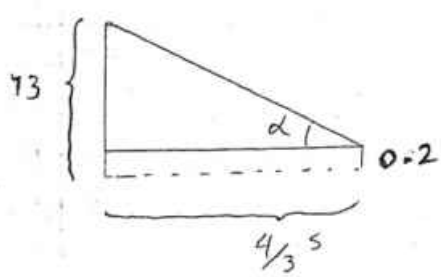
$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = 0.082 \implies f = 6\ Hz \implies T_d = \frac{1}{6}\ s$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 37.7 \ \frac{rad}{s} \implies \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\beta^2}} = 37.8 \ \frac{rad}{s}$$

$$X = \frac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2\beta r)^2}} \implies \boxed{X = 0.32\ mm}$$

اگر میرایی از نوع کولمب باشد :

شیب خط کاهش $\quad tg\,\alpha = \frac{2\mu N \omega_n}{\pi k} \implies \frac{13-0.2}{4/3} = 9.6$



سیکل 6 $\quad 7\ s$

سیکل 8 $\quad \frac{8}{6}\ s$

$$\frac{4\mu N}{k} = 1.6 \implies \frac{4\mu g}{\omega_n^2} = 1.6$$

مقدار کاهش دامنه در هر سیکل $\quad X_n - X_{n+1} = \frac{4\mu N}{k} \implies \frac{13-0.2}{8} = 1.6 = \frac{4\mu N}{k}$

$$\begin{cases} \dfrac{4\mu N}{k} = 1.6 \\ \dfrac{2\mu N W_n}{\pi k} = 9.6 \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{W_n} = \frac{1.6}{9.6} \Rightarrow \boxed{W_n = 37.7 \ \frac{rad}{s}}$$

$$\frac{4\mu N}{k} = 1.6 = \frac{4\mu g}{W_n^2} = 1.6$$

$$\Rightarrow \mu = 0.038 \ , \ k = 25\times10^4 \ \frac{N}{m} \ , \ N = 1724 N$$

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2}} \Rightarrow \underline{X = 0.317 \ mm}$$

جواب مسئله 4 :

$$-c\dot{x} - k(x - x_1) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kx_1 = 10k\sin 12t$$

$$\zeta = \frac{c}{2mW_n} = \frac{20}{2\times4\times10} = 0.25$$

$$W_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{420}{4}} = 10 \ \frac{rad}{s} \ , \ W = 12 \ \frac{rad}{s}$$

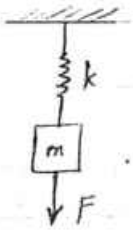
$$\frac{X}{b} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \Rightarrow \boxed{X = 17.6 \ mm}$$

$$tg\,\varphi = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ \varphi = 53.7^\circ \end{matrix}$$

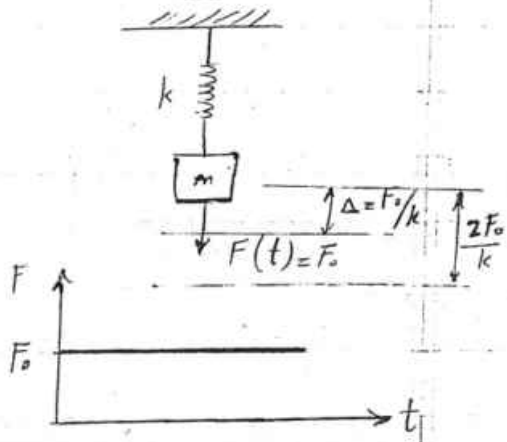
« فصل پنجم – انتگرال کانولوشن در ارتعاشات »

و استفاده از تبدیل لاپلاس

تابع پله‌ای مستطیلی :



F اختیاری است .



« تابع پله‌ای مستطیلی »

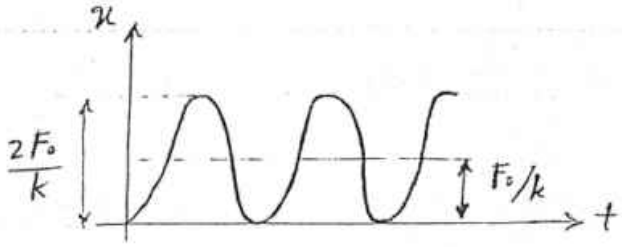
$$m\ddot{x} + kx = F_0$$

$$x = A\cos w_n t + B\sin w_n t + \frac{F_0}{k}$$

شرایط اولیه سکون

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-F_0}{k} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{F_0}{k}(1 - \cos w_n t)$$ معادلهٔ پاسخ



تغییر شکل استاتیکی $\Delta = F_0/k$

$$X_{max} = \frac{2F_0}{k}$$

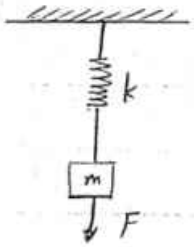
نکته : اگر به جرم یک بار ناگهانی وارد شود تغییر شکل دینامیکی دو برابر تغییر شکل استاتیکی می باشد .

شرایط اولیه
$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 - \dfrac{F_0}{k} \\ B = \dfrac{v_0}{\omega_n} \end{cases}$$

$$x = \left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right)\cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + \frac{F_0}{k}$$

معادله پاسخ
$$\boxed{x = \sqrt{\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2}\right)}\sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{F_0}{k}(1 - \cos\omega_n t)}$$

تابع نیروی افزاینده خطی :

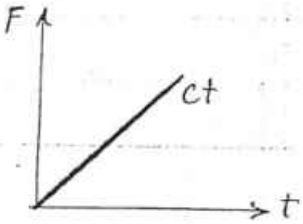


$F = ct$ → ضریب زاویه بار

$$m\ddot{x} + kx = ct$$

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{ct}{k}$$

که این پاسخ حرکت و نیروی F دائم می‌باشد.

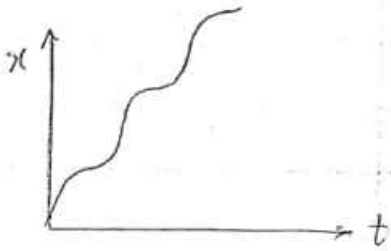


« تابع نیروی افزاینده خطی »

ساده‌ترین حالت ⇒ شرایط اولیه سکون
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{-c}{k\omega_n} \end{cases}$$

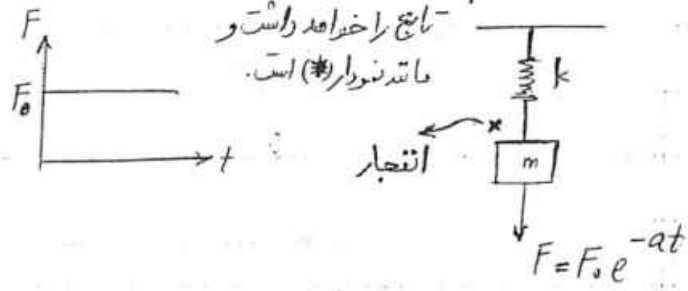
$$x = \frac{-c}{k\omega_n}\sin\omega_n t + \frac{ct}{k}$$

$$\boxed{x = \frac{c}{k\omega_n}(\omega_n t - \sin\omega_n t)}$$
معادله پاسخ برحسب زمان



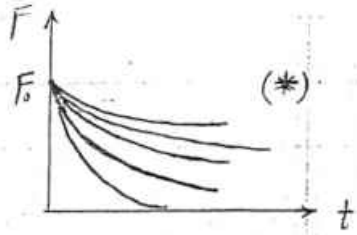
تابع کاهنده نمایی : (تابع انفجاری)

اگر در نزدیکی جرم یک انفجار رخ دهد رفتار همین تابع را خواهد داشت و مانند نمودار (*) است.



$a \to 0$
$F \to F_0$ $\longrightarrow$ تابع پله‌ای مستقل بدست می‌آید

$a \to \infty$ $\longrightarrow$ تابع ضربه‌ای



$F = F_0 e^{-at}$
تابع کاهنده نمایی

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{-at}$$

$$x = A\cos w_n t + B\sin w_n t + \frac{F_0 e^{-at}}{ma^2 + k}$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A + \dfrac{F_0}{ma^2+k} \longrightarrow A = \dfrac{-F_0}{ma^2+k} = \dfrac{-F_0}{k\left(\frac{a^2}{w_n^2}+1\right)} \\ 0 = Bw_n - \dfrac{aF_0}{ma^2+k} \longrightarrow B = \dfrac{aF_0}{w_n(ma^2+k)} = \dfrac{aF_0}{w_n k\left(\frac{a^2}{w_n^2}+1\right)} \end{cases}$$

$$x = \frac{F_0}{k\left(1 + \frac{a^2}{w_n^2}\right)}\left[\frac{a}{w_n}\sin w_n t - \cos w_n t + e^{-at}\right]$$

$at > 5 \Rightarrow e^{-at} \ll$ قابل صرف‌نظر کردن است.

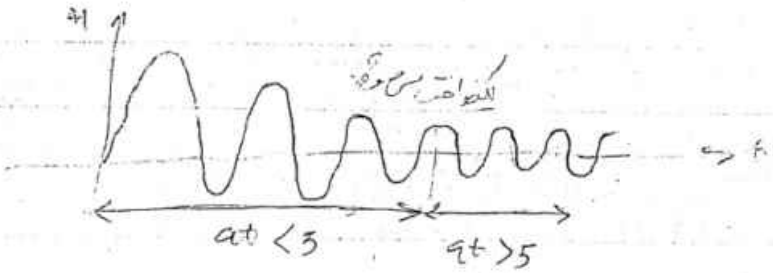
$$x = \frac{F_0}{k\left(1 + \frac{a^2}{w_n^2}\right)}\left(\frac{a}{w_n}\sin w_n t - \cos w_n t\right)$$

$$x = \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{W_n^2}\right)}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{W_n^2}}\ \sin\left(W_n t-\varphi\right)\right)$$

$$x = \frac{F_0}{k\sqrt{1+\frac{a^2}{W_n^2}}}\ \sin\left(W_n t-\varphi\right)$$

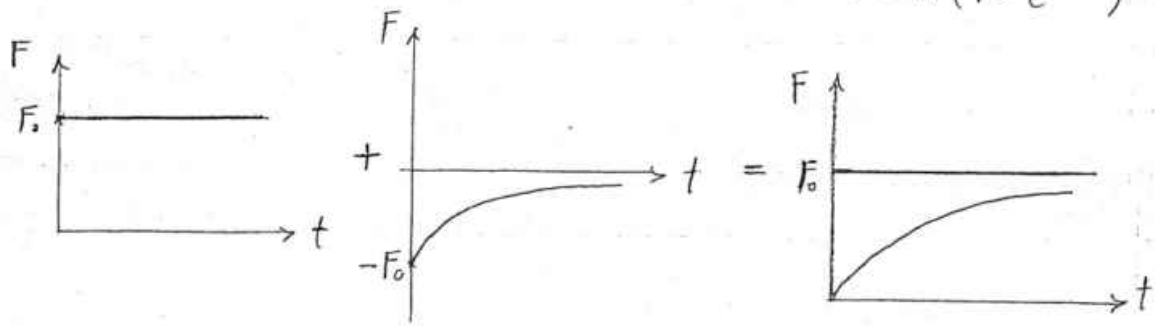
$$\boxed{\begin{array}{l} y = a\sin t + b\cos t \\ y = \sqrt{a^2+b^2}\ \sin(t-\varphi) \end{array}}$$

$$x = X\ \sin\left(W_n t-\varphi\right)$$

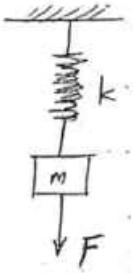


ترکیب توابع نیرو :

$$F = F_0\left(1-e^{-at}\right)$$



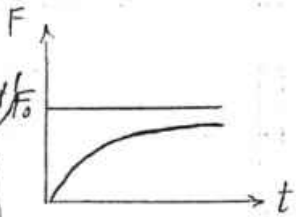
بدست آورید ⟸
پاسخ مسئله

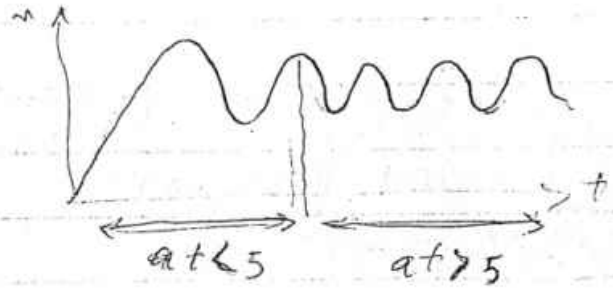


پاسخ مسئله
با شرایط سکون

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases}$$

$$x = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{W_n^2}\right)}\left[\frac{a}{W_n}\left(\frac{a}{W_n}\cos W_n t + \sin W_n t\right) + e^{-at}\right]$$

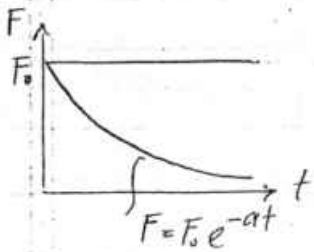




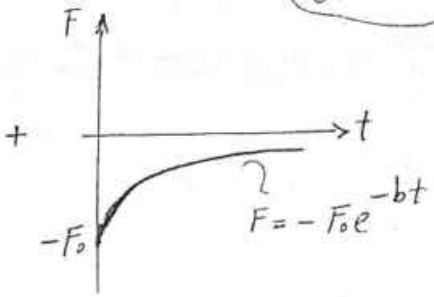
ترکیب دو تابع کاهنده نمایی : (دو تابع انفجاری)

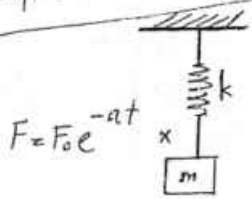
$$m\ddot{x} + kx = F_0\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

$$\boxed{x_p = Ee^{Ft} + Ge^{Ht}}$$ معادله مربوط به عضو

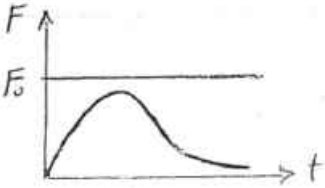


+





=



$$F = F_0\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

تایپ و تکثیر عمادی
بلوار امامیه - بین ۳۷ و ۳۹
تلفن: ۶۶۴۳۳۵۱

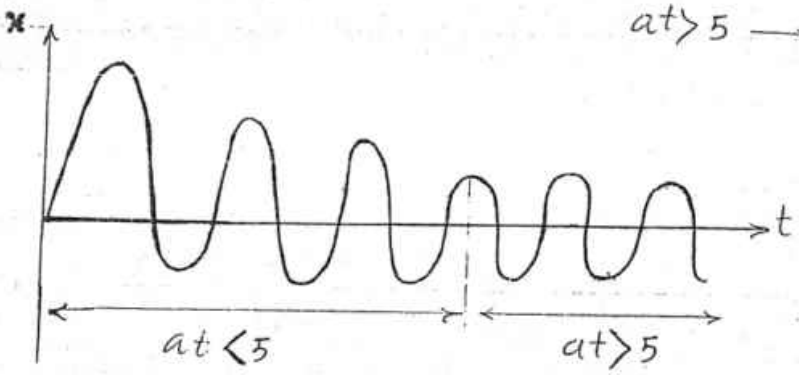
$$x = A\cos w_n t + B\sin w_n t + \frac{F_0}{k}\left[\frac{e^{-at}}{1+\frac{a^2}{w_n^2}} - \frac{e^{-bt}}{1+\frac{b^2}{w_n^2}}\right]$$

شرایط اولیه سکون $\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{w_n^2}\right)} + \dfrac{F_0}{k\left(1+\frac{b^2}{w_n^2}\right)} \\ B = \dfrac{aF_0}{kw_n\left(1+\frac{a^2}{w_n^2}\right)} - \dfrac{bF_0}{kw_n\left(1+\frac{b^2}{w_n^2}\right)} \end{cases}$

$$x = \frac{F_0}{k\left(1+\frac{a^2}{w_n^2}\right)}\left[\frac{a}{w_n}\sin w_n t - \cos w_n t + e^{-at}\right] -$$

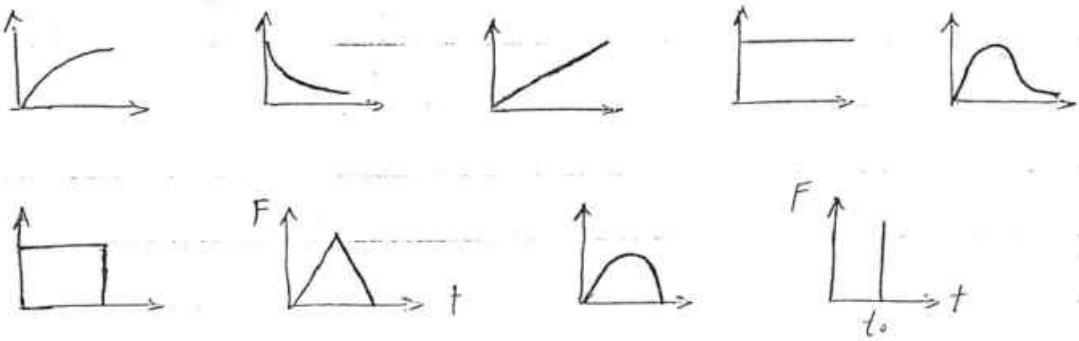
$$\frac{F_0}{k\left(1+\frac{b^2}{w_n^2}\right)}\left[\frac{b}{w_n}\sin w_n t - \cos w_n t + e^{-bt}\right]$$

$at > 5 \longrightarrow$ معادله پاسخ یکنواخت



توجه: نمودارهای بدست آمده در هر یک از توابع پله‌ای، کاهنده نمائی و ترکیب توابع به کمک نرم‌افزار Matlab یا Excel رسم کنید.

پاسخ ارتعاشی در حالت بار اختیاری:
- حل مسئله به روش معمول (معادله غیرهمگن تحریک بصورت دائمی است.)
- 〃 〃 〃 تبدیل لاپلاس (بارهای غیردائم)
- 〃 〃 〃 انتگرال کانولوشن



استفاده از روش تبدیل لاپلاس در حل مسائل ارتعاشات :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(s) \qquad t \rightleftarrows s$$

مثلاً : $f(t) = e^{-at}$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \int_0^\infty e^{-at}\cdot e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}}$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \int_0^\infty \cos at\cdot e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}\left(-s\cos at + a\sin at\right)\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \int_0^\infty \sin at\cdot e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}\left(-a\cos at - s\sin at\right)\right]_0^\infty$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}}$$

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
B	B/s	$e^{-at}\sin\omega t$	$\omega/((s+a)^2+\omega^2)$
t	$1/s^2$	$\cos\omega t\cdot e^{-at}$	$(s+a)/((s+a)^2+\omega^2)$
e^{-at}	$1/(s+a)$	$t\cdot e^{-at}$	$1/(s+a)^2$
$\sin at$	$a/(s^2+a^2)$	$t\cdot\sin at$	$2as/(s^2+a^2)^2$
$\cos at$	$s/(s^2+a^2)$	$t\cdot\cos at$	$(s^2-a^2)/(s^2+a^2)^2$

$f(t)=x$	$F(s)$
$f'(t)=\dot{x}$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)=\ddot{x}$	$s^2F(s)-\underbrace{sf(0)}_{\text{مکان اولیه}}-\underbrace{f'(0)}_{\text{سرعت اولیه}}$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$

$X(s)$ تبدیل یافته پاسخ می‌باشد.

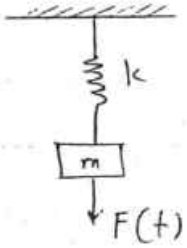
$$m\ddot{x}+(\dot{x}+kx)=f(t)$$ ⟸ از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$m\left[s^2X(s)-s\,x(0)-\dot{x}(0)\right]+c\left[sX(s)-x(0)\right]+kX(s)=F(s)$$

$$X(s)=\frac{F(s)}{ms^2+cs+k}+\frac{(ms+c)\,x(0)+m\,\dot{x}(0)}{ms^2+cs+k}$$ ⟸ از طرفین لاپلاس معکوس می‌گیریم

$x(t)=$

مسئله : با استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخ زمانی سیستم را بدست آورید.



شرایط مرزی $\begin{cases} x(0) = 0.1 \\ \dot{x}(0) = 8 \end{cases}$

$$F(t) = F_0 \cos wt = 4 \cos 60t$$

$$SI \begin{cases} m = 0.2 \ kg \\ k = 500 \ N/m \\ F_0 = 4 \ N \\ w = 60 \ \frac{rad}{s} \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin wt$$

$$x = \underbrace{A \cos w_n t + B \sin w_n t}_{\text{پاسخ عمومی - گذرا}} + \underbrace{C \cos wt + D \sin wt}_{\text{پاسخ خصوصی - یکنواخت یا دائم}}$$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم :

$$\mathcal{L}(m\ddot{x} + kx) = \mathcal{L}(F_0 \cos wt)$$

$$m\left[s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0)\right] + k\left[X(s)\right] = F_0 \frac{s}{s^2 + w^2}$$

$$0.2\left[s^2 X(s) - 0.1 s - 8\right] + 500 X(s) = \frac{4s}{s^2 + 60^2}$$

$$X(s) = \frac{0.02 s^3 + 1.6 s^2 + 76 s + 5760}{(0.2 s^2 + 500)(s^2 + 60^2)}$$

$$X(s) = \frac{As + B}{0.2 s^2 + 500} + \frac{Cs + D}{s^2 + 60^2}$$

X در میدان s و
x در میدان زمان (t)
تعریف می‌شود.

از حل دستگاه چهار معادله و چهار مجهول مقادیر زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} A = 0.02363 \\ B = 1.6 \\ C = -0.01818 \\ D = 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{0.02363\, s}{0.2\, s^2 + 500} + \frac{1.6}{0.2 s^2 + 500} - \frac{0.01818\, s}{s^2 + 60^2}$$

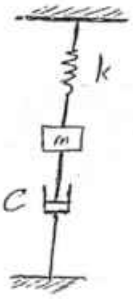
$$X(s) = \frac{(0.02363/0.2)\, s}{s^2 + 50^2} + \frac{8}{s^2 + 50^2} - \frac{0.01818\, s}{s^2 + 60^2}$$

از طرفین معادله فوق لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{0.1182 \cos 50t + 0.16 \sin 50t}_{\text{پاسخ گذرا}} - \underbrace{0.01818 \cos 60t}_{\text{پاسخ یکنواخت}}}$$

پاسخ کلی اثر هر دو فرکانس طبیعی و تحریک می‌باشد. از روی فرکانس‌ها می‌توان پاسخ گذرا و یکنواخت را تشخیص داد.

مسئله: سیستم زیر در سیستم انگلیسی تعریف شده و پاسخ زمانی آن را تعیین کنید.



$$\begin{cases} m = 1 \\ k = 10^4 \\ C = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ x(0) = 0.5 \ (in) \\ \dot{x}(0) = 40 \ (in/s) \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0$$

$$\mathcal{L}(m\ddot{x} + C\dot{x} + kx) = 0$$

$$m\left[s^2 X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)\right] + C\left[sX(s) - x(0)\right] + kX(s) = 0$$

$$1\left[s^2X(s)-2.5s-40\right]+100\left[sX(s)-2.5\right]+10^4X(s)=0$$

$$X(s)=\frac{2.5s+90}{s^2+100s+10^4}$$

$$X(s)=\frac{2.5s}{s^2+100s+10^4}+\frac{90}{s^2+100s+10^4}$$

$$s^2+100s+10^4=(s+50)^2+86.6^2$$

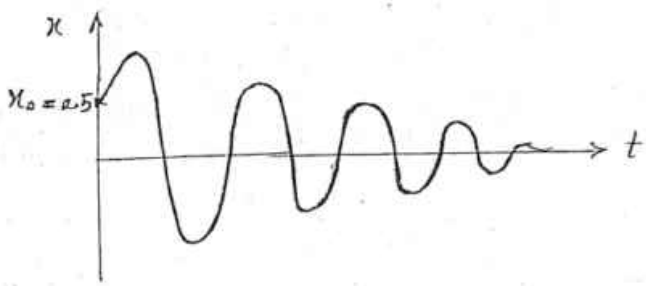
$90-25=65$

$$X(s)=\frac{1}{2}\,\frac{s+50}{(s+50)^2+86.6^2}+\frac{65}{(s+50)^2+86.6^2}$$

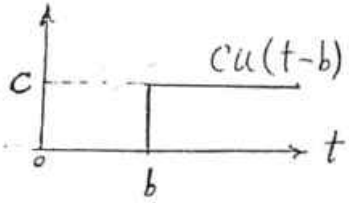
$65 \rightarrow \frac{3}{4}\times 86.6$

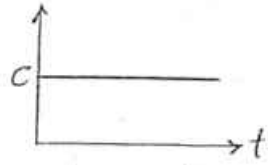
از طرفین لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$\boxed{x(t)=e^{-50t}\left(2.5\cos 86.6t+2.75\sin 86.6t\right)}$$



: Step Function تابع





$b=0 \quad , b \to 0$

$u(t-b) = 0 \quad \text{if} \quad t < b$

$u(t-b) = 1 \quad \text{if} \quad t \geq b$

$m\ddot{x} + kx = cu(t-b)$

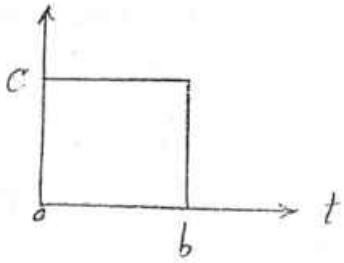
$$\mathcal{L}\left[cu(t-b)\right] = \int_0^\infty c e^{-st} \cdot u(t-b)\, dt$$

$$= c\int_0^b e^{-st} \cdot 0\, dt + c\int_b^\infty e^{-st} \cdot 1 \cdot dt$$

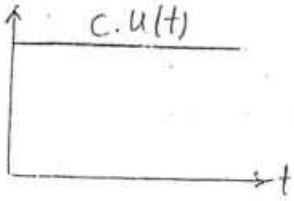
$$= \frac{c}{s} e^{-sb}$$

$$b=0 \longrightarrow \mathcal{L}\left(cu(t)\right) = \frac{c}{s}$$

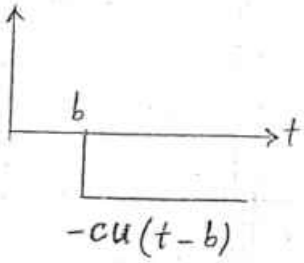
: (Rectangular pulse) تابع پالس مستطیلی



$\equiv$



$+$

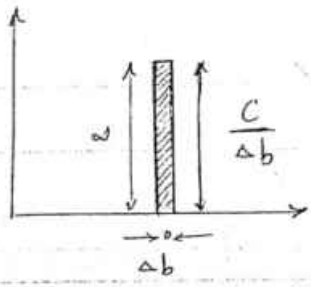


$f(t) = cu(t) - cu(t-b)$

$$\mathcal{L}\left[cu(t)-cu(t-b)\right]=\int_0^b c\cdot e^{-st}\,dt+\int_b^\infty 0\cdot e^{-st}\,dt$$

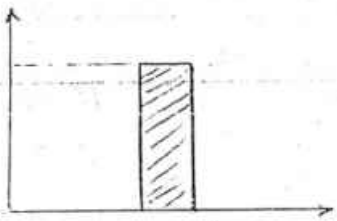
$$=c\int_0^b e^{-st}\,dt=\frac{c}{s}\left(1-e^{-sb}\right)$$

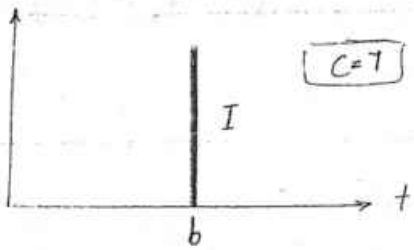
تابع ضربه (Impulse):



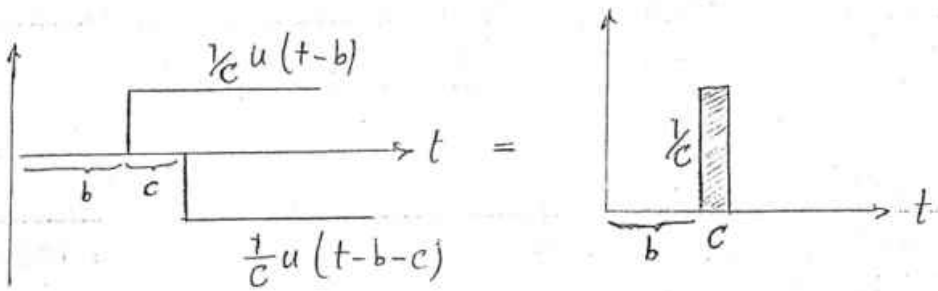
اگر سطح زیر منحنی برابر واحد باشد حاصل یک ضربه واحد یا Unit Impulse خواهد بود.

$u'(t-b)=$ Unit Impulse





$$u'(t-b)=\lim_{c\to 0}\left[\frac{1}{c}u(t-b)-\frac{1}{c}u(t-b-c)\right]$$



$$\mathcal{L}\, u'(t-b) = \lim_{c \to 0} \left[\frac{e^{-sb} - e^{-s(b+c)}}{cs} \right]$$

$$c \to 0 \quad \frac{+s e^{-s(b+c)}}{s}$$

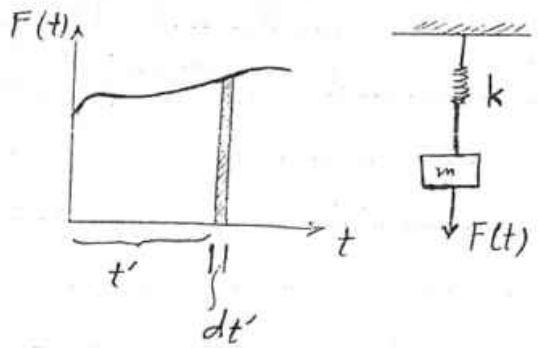
چون $\frac{0}{0}$ می‌شود هوپیتال می‌گیریم و مخرج و صورت کسر را نسبت به c مشتق می‌گیریم:

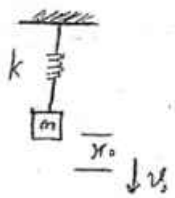
$$\boxed{\mathcal{L}\, u'(t-b) = e^{-sb}}$$

انتگرال کانولوشن :

این روش تابع $F(t)$ را به یکسری ضربه تبدیل می‌کند.

انتگرال کانولوشن





اگر یک سیستم تحت تغییر شکل و سرعت اولیه به اندازهٔ x_0 و v_0 داشته باشیم:

پاسخ سیستم : $x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$

ضربه کوچک : $F(t').d(t')$

طبق قانون دوم نیوتن : $F(t').dt' = m\,d\dot{x}$

$$d\dot{x} = \frac{F(t').dt'}{m}$$

در دینامیک $\int F dt = \int m dv$

$F.t = mv$

در اثر اعمال نیروی $F(t')$ در مدت dt' به جسم چقدر افزایش تغییر مکان می‌دهد؟

در حال حرکت

(در لحظه t')

$$dx = ?$$

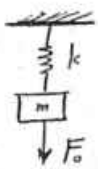
چون در لحظه t' فقط سیستم سرعت دارد ($d\dot{x}$) بنابراین داریم:

$$dx = \frac{d\dot{x}}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n (t-t')$$

$$dx = \frac{F(t') \cdot d(t')}{m \cdot \omega_n} \sin \omega_n (t-t')$$

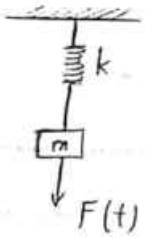
$$\boxed{x = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \underbrace{F(t')}_{\text{مقدار بار تحریک}} \cdot \sin \omega_n (t-t')\, dt'}$$

مثال:



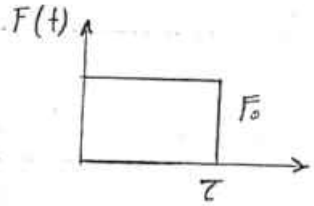
$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 \sin \omega_n (t-t')\, dt'$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n (t-t')\, dt' = \frac{F_0}{k} \left(1 - \cos \omega_n t \right)$$



مثال: پاسخ سیستم

$$x(t) = \frac{1}{m w_n}\left[\int_0^{\tau} F_0 \sin w_n (t-t')\,dt' + \int_{\tau}^{t} \cancel{0 \cdot \sin w_n (t-t')}\,dt'\right]$$



$$x = \frac{F_0}{k}\left(\cos w_n (t-\tau) - \cos w_n t\right)$$

پاسخ سیستم پس از اتمام بار

قبل از اتمام بار باید $\cos w_n (t-\tau) = 1$ قرار داده شود و پاسخ بصورت $x = \frac{F_0}{k}(1-\cos w_n t)$ در می‌آید.

با استفاده از تبدیل لاپلاس:

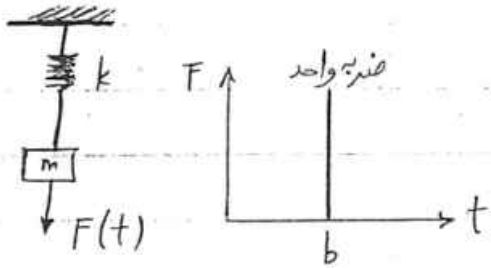
$$m\ddot{x} + kx = F_0\left[u(t) - u(t-\tau)\right]$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow m s^2 X(s) + k X(s) = F_0\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s\tau}}{s}\right)$$

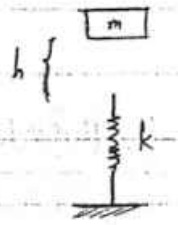
$$X(s) = \frac{F_0}{m}\left[\frac{1-e^{-s\tau}}{s(s^2+w_n^2)}\right]$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x(t)) = X(s) \\ \mathcal{L}(\ddot{x}(t)) = s^2 X(s) \\ \mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}(u(t-\tau)) = \frac{e^{-s\tau}}{s} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{F_0}{k}(1-\cos w_n t) & 0 < t < \tau \\ x(t) = \frac{F_0}{k}\left(\cos w_n (t-\tau) - \cos w_n t\right) & t > \tau \end{cases}$$

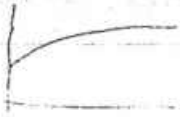
تمرین :



تمرین :



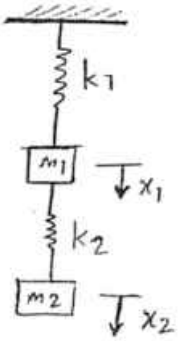
$$\begin{cases} \dot{x}(0) = \sqrt{2gh} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$



$m\ddot{x} + kx = mg$

$$\left|\left(\frac{\ddot{x}}{g}\right)_{max}\right| = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}} + 1}$$

« فصل ششم - سیستمهای دو درجه آزادی »



نکات :

۱- متغیرهای x_1 و x_2 از هم مستقل اند.

۲- (ω_{n_1}) و (ω_{n_2}) دو فرکانس طبیعی سیستم هستند.

۳- (ω_{n_1}) و (ω_{n_2}) ما کاریم و میبینیم مقدار فرکانس ممکن است که سیستم میتواند با آن ارتعاش کند.

حرکت جسم 1 $\quad x_1 = A\cos\omega_{n_1}t + B\cos\omega_{n_2}t$

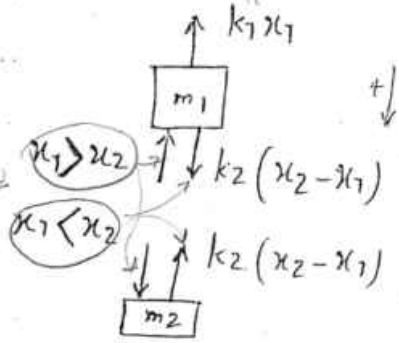
حرکت جسم 2 $\quad x_2 = C\cos\omega_{n_1}t + D\cos\omega_{n_2}t$

۴- اگر سیستم از یک شرایط اولیه شروع به کار کند، حرکت آن ترکیبی از هر دو فرکانس طبیعی خواهد بود.

۵- سیستمهای ۲ درجه آزادی دارای ۲ mode shape هستند.

تحلیل مسئله:
- روش نیوتن
- روش انرژی

تعیین فرکانس های طبیعی
تعیین مُد شیپ ها (mode shape) ← شکل حرکت
تعیین پاسخ زمانی (پاسخ کل سیستم)



سیستم ممکن است با فرکانس ω_{n_1} یا ω_{n_2} یا فرکانسی بین این دو ارتعاش کند.

$$\sum F = ma$$

$$\begin{cases} -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) = m_1\ddot{x}_1 & \text{برای جسم ۱} \\ -k_2(x_2-x_1) = m_2\ddot{x}_2 & \text{برای جسم ۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1\sin\omega t \\ x_2 = X_2\sin\omega t \end{cases} \xrightarrow[\text{مستقل از زمان}]{\text{بعلاوه}} \begin{cases} -k_1X_1 + k_2(X_2-X_1) = -m_1\omega^2X_1 \\ -k_2(X_2-X_1) = -m_2\omega^2X_2 \end{cases}$$

$\sin\omega t$ از طرفین خط می‌خورد

ساده‌ترین فرم ممکن اگر بررسی فرکانس طبیعی قرار گیرد

(حالتی که روی یکی از 2 mode shape قرار گرفته)

$$\begin{cases} x_1 = A\sin(\omega_{n_1}t + \varphi_1) + B\sin(\omega_{n_1}t + \varphi_2) \\ x_2 = A'\sin(\omega_{n_2}t + \varphi_1) + B'\sin(\omega_{n_2}t + \varphi_2) \end{cases}$$

(*)

$$\Rightarrow \begin{cases} (-k_1-k_2+m_1\omega^2)X_1 + k_2X_2 = 0 \\ k_2X_1 + (-k_2+m_2\omega^2)X_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (-2k+m\omega^2)X_1 + kX_2 = 0 \\ kX_1 + (-k+m\omega^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

$X_1 = X_2 = 0$ ← استاتیک مسئله (بدون ارتعاش) $\Longrightarrow$ جواب قابل قبول نیست

جواب‌های دیگر با این شرط درست خواهند آمد که ۲ معادله فوق وابسته باشند.

* بنابراین شرط وجود جواب آنست که دترمینان ضرایب صفر باشد: (شرط داشتن جوابهای غیر صفر)

$$\begin{vmatrix} -k_1-k_2+m_1\omega^2 & k_2 \\ k_2 & -k_2+m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

از بسط دترمینان یک معادله توان چهارم از ω بدست می‌آید که به معادله فرکانس مشهور است.

$$\Rightarrow k_1k_2 - k_1m_2\omega^2 + k_2^2 - k_2m_2\omega^2 - k_2m_1\omega^2 + m_1m_2\omega^4 - k_2^2 = 0$$

$$m_1m_2\omega^4 + (-k_1m_2 - k_2m_2 - k_2m_1)\omega^2 + k_1k_2 = 0$$

فرض $\begin{cases} k_1 = k_2 = k \\ m_1 = m_2 = m \end{cases} \Longrightarrow \boxed{m^2\omega^4 + (-3km\omega^2) + k^2 = 0}$

$$\omega^4 - \frac{3k}{m}\omega^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad \begin{cases} \omega_{n_1} \\ \omega_{n_2} \end{cases}$$

(معادله فرکانس حتماً باید دارای درجه‌ی ۴ و ۲ باشد)

فرکانس‌های طبیعی ریشه‌های مثبت معادله فوق هستند.

$$\boxed{\omega^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_n)_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1.6\sqrt{\frac{k}{m}} \\ (\omega_n)_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 0.6\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

نکته: در پیدا کردن ریشه‌ها باید دقت کرد که باید حتماً عبارات زیر رادیکال مثبت باشد و اگر منفی بود اشتباه حل کرده‌ایم و این یک روش چک کردن جواب مسئله است.

$$\frac{X_2}{X_1} \text{ یا } \frac{X_1}{X_2} \Leftarrow \text{mode shape}$$

مُدشیب اوّل بیان می‌کند:

اگر سیستم با فرکانس W_{n1} ارتعاش کند.

$$\begin{cases} \dfrac{x_2(0)}{x_1(0)} = -0.6 \\ \dfrac{\dot{x}_2(0)}{\dot{x}_1(0)} = -0.6 \end{cases}$$

$$(*) \Longrightarrow \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - m\omega^2}{k}$$

$$// \quad (W_{n1})^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m} \Longrightarrow \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_1 = \frac{2k - m\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}{k} = 2-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \simeq -0.6$$

$$// \quad (W_{n2})^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m} \Longrightarrow \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_2 = \frac{2k - m\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}{k} = 2-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \simeq 1.6$$

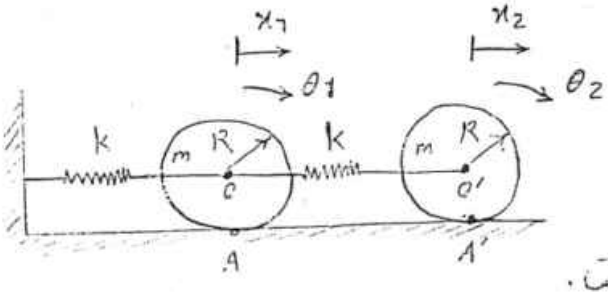
نکته: وقتی سیستم با فرکانس طبیعی (W_{n2}) نوسان کند روی مُدشیب دوّم می‌افتد و در نهایت سیستم طوری نوسان می‌کند که ماکزیمم دامنه جرم دوّم (X_2) به ماکزیمم دامنه جرم اوّل (X_1) برابر 1.6 شود.

و همچنین وقتی سیستم با فرکانس طبیعی (W_{n1}) نوسان کند روی مُدشیب اوّل می‌افتد و در نهایت سیستم طوری نوسان می‌کند که ماکزیمم دامنه جرم دوّم به جرم اوّل برابر 0.6- شود.

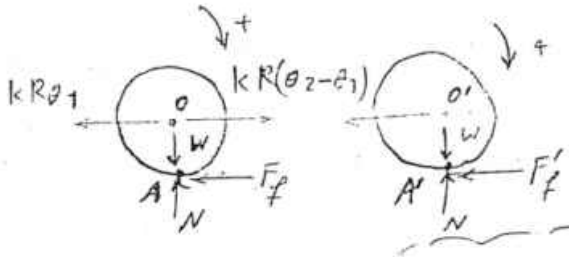
نکته: از نکته فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر بخواهیم سیستم با فرکانس طبیعی (W_{n1}) نوسان کند باید طوری حرکت جرم‌ها تنظیم شود که $\frac{X_2}{X_1} = -0.6$ شود و اگر بخواهیم با فرکانس (W_{n2}) نوسان کند باید در تنظیم حرکت جرم‌ها نسبت $\frac{X_2}{X_1} = 1.6$ را ایجاد کرد.

و اگر نسبت ماکزیمم دامنه‌ها یعنی $\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$ یکی از دو مقدار فوق نباشد سیستم با فرکانس مابین (W_{n1}) و (W_{n2}) نوسان می‌کند.

نکته: مدشیب اوّل که متقارن می‌باشد نشانگر آنست که حرکت جرم‌ها مخالف یکدیگر است یعنی این مُدشیب بازشونده و بسته شونده است و سیستم با فرکانس (W_{n1}) ارتعاش می‌کند و مُدشیب دوّم که مثبت است بیانگر آنست که حرکت جرم‌ها موافق یکدیگر است یعنی دیاگرام می‌باشد و سیستم با فرکانس (W_{n2}) ارتعاش می‌کند.



مثال: فرکانس‌های طبیعی و مودشیب‌های سیستم مقابل را بدست آورید. غلطک‌ها استوانه‌ای هستند و حرکت غلتشی بدون لغزش است.



حرکت غلتشی بدون لغزش:

$$\begin{cases} \theta_2 > \theta_1 \\ x_2 > x_1 \end{cases}$$

$f_f \neq \mu . N$ بخاطر غلتش

F_f و F_f' تابعی از زمان هستند.

معادله $\sum M = I\alpha$ را برای جسم مرکز آن می‌نویسیم

$$\begin{cases} \sum M_A = I_A \ddot{\theta}_1 \\ \sum M_{A'} = I_{A'} \ddot{\theta}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -kR^2\theta_1 + kR^2(\theta_2-\theta_1) = \frac{3}{2} mR^2 \ddot{\theta}_1 \\ -kR^2(\theta_2-\theta_1) = \frac{3}{2} mR^2 \ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل حرکت:

معادلات برحسب θ می‌شود

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_1 \sin \omega t \\ \theta_2 = \theta_2 \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k\theta_1 + k(\theta_2-\theta_1) = -\frac{3}{2} m\omega^2 \theta_1 \\ -k(\theta_2-\theta_1) = -\frac{3}{2} m\omega^2 \theta_2 \end{cases}$$

معادلات مستقل از زمان بدست آمد:

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(-2k + \frac{3}{2} m\omega^2\right)\theta_1 + k\theta_2 = 0 \quad (*) \\ k\theta_1 + \left(-k + \frac{3}{2} m\omega^2\right)\theta_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[(*)]{\text{مودشیب}} \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{2k - \frac{3}{2}\times}{k}$$

شرط داشتن جواب غیرصفر دستگاه فوق صفر بودن دترمینان ضرایب است

$$\begin{vmatrix} -2k + \frac{3}{2} m\omega^2 & k \\ k & -k + \frac{3}{2} m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2k^2 - 3mk\omega^2 - \frac{3}{2} mk\omega^2 + \frac{9}{4} m^2\omega^4 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} m^2\omega^4 - \frac{9}{2} mk\omega^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \omega^4 - 2\left(\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{}\right.$$

$$\omega^2 = \left(\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{4}{9}}\right)\frac{k}{m} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{n_1}^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{k}{m} \simeq 1.73\frac{k}{m} \\ \omega_{n_2}^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{k}{m} \simeq 0.27\frac{k}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_1 = \alpha_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.6 \\ \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_2 = \alpha_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.6 \end{cases}$$

اگر سیستم با مُدشیب دوم و فرکانس ω_{n_2} ارتعاش کند:

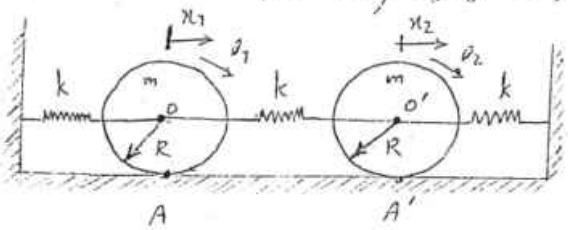
$$\begin{cases} \frac{\theta_2(0)}{\theta_1(0)} = 1.6 \\ \frac{\dot\theta_2(0)}{\dot\theta_1(0)} = 1.6 \end{cases}$$

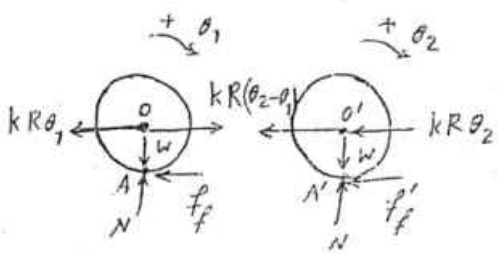
می‌تواند بزرگتر باشد

توجه: اگر می‌خواستیم در حل مسئله فوق از خاصیت مرکز آنی دوران استفاده نکنیم باید برای هر استوانه روابط مقابل را بنویسیم و حل کنیم:

$$(*)\begin{cases} \sum F = m\underbrace{a}_{\ddot{x}} \\ \sum M_o = I_o \cdot \underbrace{\alpha}_{\ddot{\theta}} \end{cases}$$

نکته: اگر سیستم فوق بصورت متقارن باشد یعنی از نظر هندسی متقارن باشد $\theta_2 = \theta_1$ و $x_2 = x_1$ می‌شود و همواره در سیستم‌های متقارن مُدشیب‌ها $1, -1$ می‌شود. $(\alpha = \pm 1)$



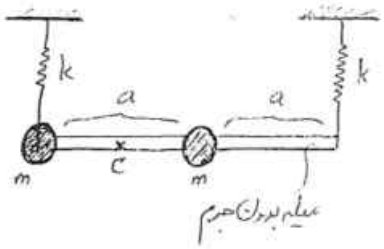


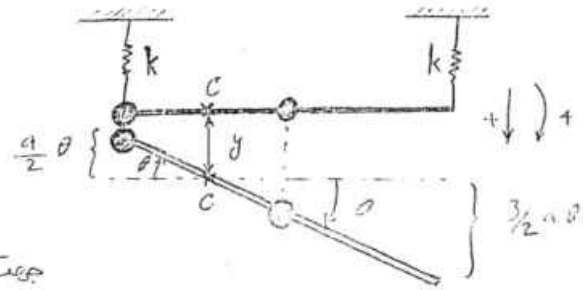
انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\dot\theta_2^2$

انرژی پتانسیل $U = \frac{1}{2}k(R\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(R\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k\left(R(\theta_2-\theta_1)\right)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{n_1}^2 = \frac{2k}{3m} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{k}{m}, \quad \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_1 = \alpha_1 = +1 \\ \omega_{n_2}^2 = \frac{2k}{m} = 2\left(\frac{k}{m}\right), \quad \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)_2 = \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

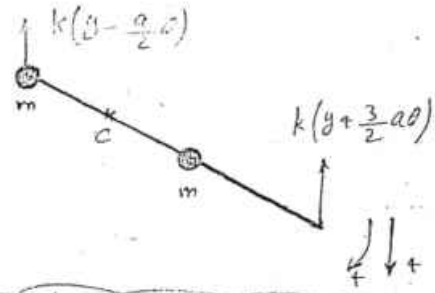
مثال: تعیین فرکانس طبیعی و مدشکل‌های مادر سیستم زیر.





جهت دوران حول مرکز ثقل اختیاری است و برای سهولت کردن مرکز ثقل دستگاه xy را در مرکز گلوله سمت چپ قرار می‌دهیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{0 \times m + a \times m}{m+m} = \frac{a}{2}$$



$$\begin{cases} \sum F = m_{کل} \cdot a_C & \text{حرکت خطی مرکز ثقل} \\ \sum M_C = I_C \cdot \ddot{\theta} = I_C \cdot \alpha & \text{حرکت دورانی حول مرکز ثقل} \end{cases}$$

y : متغیر مستقل مربوط به حرکت خطی مرکز ثقل

θ : متغیر مستقل مربوط به حرکت دورانی حول مرکز ثقل

$$\Rightarrow \begin{cases} -k\left(y-\frac{a}{2}\theta\right) - k\left(y+\frac{3}{2}a\theta\right) = 2m \cdot \ddot{y}_C \\ k\left(y-\frac{a}{2}\theta\right)\frac{a}{2} - k\left(y+\frac{3}{2}a\theta\right)\frac{3}{2}a = \left(\frac{ma^2}{4}+\frac{ma^2}{4}\right)\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k\left(Y-\frac{a}{2}\Theta\right) - k\left(Y+\frac{3}{2}a\Theta\right) = -2m\omega^2 Y \\ k\left(Y-\frac{a}{2}\Theta\right)\frac{a}{2} - k\left(Y+\frac{3}{2}a\Theta\right)\frac{3}{2}a = \frac{-ma^2}{2}\omega^2\Theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-2k+2m\omega^2)Y + (-ka)\Theta = 0 \\ -kaY + \left(\frac{-5}{2}ka^2 + \frac{ma^2\omega^2}{2}\right)\Theta = 0 \end{cases}$$

مدشکل $\frac{a\Theta}{Y} = \frac{-2k+2m\omega^2}{k}$

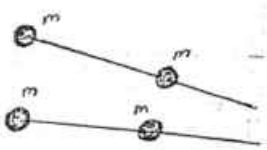
$$\begin{vmatrix} -2k+2m\omega^2 & -ka \\ -ka & -\frac{5}{2}ka^2 + \frac{ma^2\omega^2}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5k^2a^2 - mka^2\omega^2 - 5mka^2\omega^2 + m^2a^2\omega^4 - k^2a^2 = 0$$

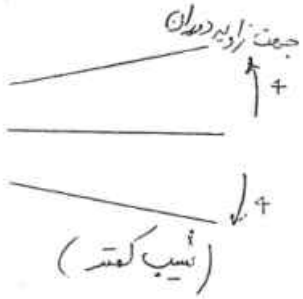
$$\omega^4 - 6\frac{k}{m}\omega^2 + 4\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \longrightarrow \omega^2 = \left(3 \pm \sqrt{9-4}\right)\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{n_1}^2 = \left(3+\sqrt{5}\right)\dfrac{k}{m} \\ \omega_{n_2}^2 = \left(3-\sqrt{5}\right)\dfrac{k}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{a\theta}{y}\right)_1 = 4+2\sqrt{5} \simeq 8.4 \\ \left(\dfrac{a\theta}{y}\right)_2 = 4-2\sqrt{5} \simeq -0.4 \end{cases}$$

در این مسئله داریم:

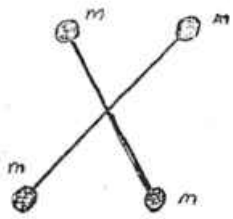




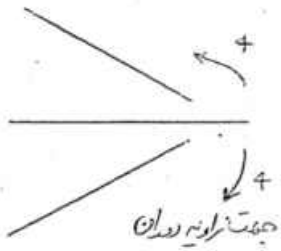
$$\left(\frac{\frac{a}{2}\theta}{y}\right)_1 \simeq 4.2$$

یعنی حرکت همسو

(همدیگر را خیلی دیر قطع می‌کنند.)



«Cross»



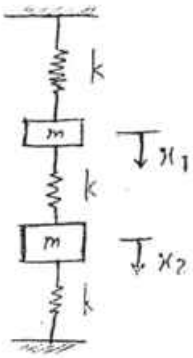
(شیب بیشتر)

$$\left(\frac{\frac{a}{2}\theta}{y}\right)_2 \simeq -0.2$$

یعنی حرکت بصورت بازشونده و بسته شونده

(همدیگر را قطع می‌کنند به این سیستم Cross گفته می‌شود یعنی متقاطع.)

* استفاده از روش انرژی (روش ریلی) در حل مسائل دو درجه آزادی :



انرژی پتانسیل $E_p = U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2$

انرژی جنبشی $E_c = T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$

چون اصطکاک در مسئله وجود ندارد پس انرژی به سیستم وارد نمی‌شود یا از آن گرفته نمی‌شود لذا : $\boxed{U_{max} = T_{max}}$

$$\left(\frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 \right)_{max} = \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \right)$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \sin \omega t \\ x_2 = X_2 \sin \omega t \end{cases}$$

بشرط اینکه سیستم بر روی فرکانس طبیعی خود نوسان کند :

$$\frac{1}{2} k X_1^2 + \frac{1}{2} k X_2^2 + \frac{1}{2} k (X_2 - X_1)^2 = \frac{1}{2} m X_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m X_2^2 \omega$$

$$\omega^2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + (X_2 - X_1)^2}{X_1^2 + X_2^2} \left(\frac{k}{m} \right)$$

$$\left(\frac{X_2}{X_1} \right) = \text{mode shape} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{1 + \alpha^2 + (\alpha - 1)^2}{1 + \alpha^2} \left(\frac{k}{m} \right)$$

روش یا اصل ریلی : مقادیر α که در این معادله می‌توانند جواب باشند (مقادیر شکل های حرکت) مقادیری هستند که این رابطه را اکسترمم سازند و در نتیجه فرکانس های بدست آمده حاصل همان فرکانس های طبیعی خواهد بود.

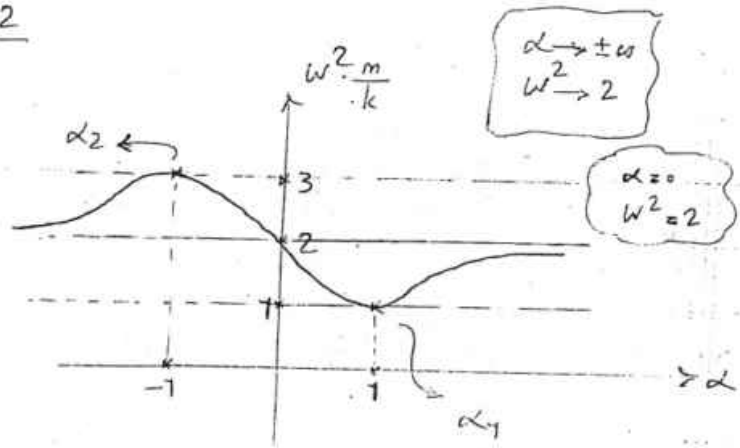
$$\frac{d(w^2)}{d\alpha} = 0 \implies (4\alpha - 2)(\alpha^2+1) - 2\alpha(2\alpha^2 - 2\alpha + 2) = 0$$

$$\implies (\alpha^2 - 1) = 0$$

حاصل حتماً باید معادله درجه ۲ باشد چون دو ریشه باید داشته باشد زیرا دو مد شیب داریم.

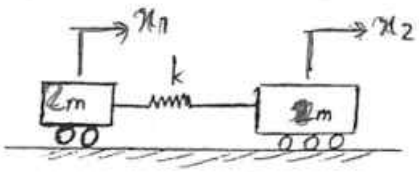
$$\implies \begin{cases} (\alpha)_1 = 1 \longrightarrow (w_1)^2 = \dfrac{k}{m} \\ (\alpha)_2 = -1 \longrightarrow (w_2)^2 = \dfrac{3k}{m} \end{cases}$$

$$w^2 \cdot \frac{m}{k} = \frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 2}{\alpha^2+1}$$



نمودار نشان دهنده آنست که اگر مرتبه‌ها به جز α_1 و α_2 باشد فرکانس‌ها حتماً بین 1 و 3 خواهد بود. یعنی نمودار کران دار است.

$x_2 > x_1$



مثال: تعیین فرکانس های حرکت و مد شیب ها در سیستم زیر.

روش انرژی:

$$U = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(m)\dot{x}_2^2$$

$$U_{max} = T_{max} \implies \frac{1}{2} k (X_2 - X_1)^2 = \frac{1}{2} m X_1^2 w^2 + \frac{1}{2}(2m) X_2^2 w^2$$

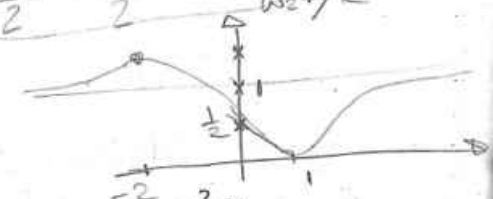
$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}(X_2 - X_1)^2}{\frac{1}{2}X_2^2 + X_1^2}\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{(X_2 - X_1)^2}{2X_1^2 + X_2^2}\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \alpha \implies \omega^2 = \frac{\frac{1}{2}(\alpha-1)^2}{1+\frac{\alpha^2}{2}}\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$\frac{d(\omega^2)}{d\alpha} = 0 \implies (\alpha-1)\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)^2 = 0$$

$$\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} - 1 = 0$$

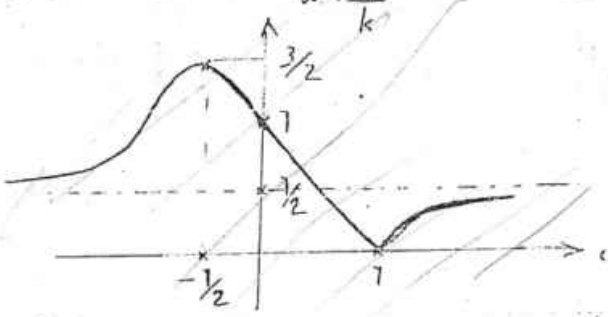
$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \longrightarrow (\omega_1)^2 = 0 \\ \alpha_2 = -2 \longrightarrow (\omega_2)^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right) \end{cases}$$



$$\frac{\omega^2 m}{k} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha^2 + 2}$$

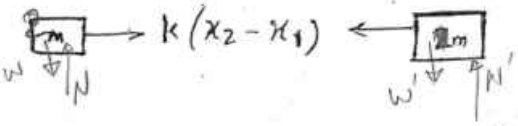
گراف نشان می‌دهد با حرکت شیب دیگری غیر از α_1 و α_2 هستیم با نوسانی مابین ω_1 و ω_2 ارتعاش می‌کند

$$\alpha \to \infty,\ \alpha \to -\infty \implies \omega^2 \to 1$$



جهت مثبت حرکت

روش نیوتن :



$x_2 > x_1$

$$\begin{cases} +k(x_2 - x_1) = 2m\ddot{x}_1 & (*) \\ -k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2 & (**) \end{cases} \xrightarrow[x_2 = X_2 \sin\omega t]{x_1 = X_1 \sin\omega t} \begin{cases} k(X_2 - X_1) = -2m X_1 \omega^2 \\ -k(X_2 - X_1) = -m X_2 \omega^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (-k + 2m\omega^2) X_1 + k X_2 = 0 \\ k X_1 + (-k + m\omega^2) X_2 = 0 \end{cases}$$

بلوار امامیه - بین ۳۷ و ۳۹
تلفن: ۶۶۴۳۳۵۱

(مرحله) ضرایب برابر با صفر

$$\cancel{\frac{X_2}{X_1} = \frac{-k+mw^2}{-k}} \Rightarrow (-k+2mw^2)(-k+mw^2)-k^2=0$$

$$k^2-2kmw^2-kmw^2+2m^2w^4-k^2=0$$

$$-3kmw^2+2m^2w^4=0$$

$$w^2(-3k+2mw^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} w_{n1}=0 \\ w_{n2}^2=\frac{3k}{2m} \end{cases}$$

شکل حرکت: $\frac{X_2}{X_1} = \frac{-k+2mw^2}{-k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (w_{n1})^2=0 \longrightarrow \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_1=1 \\ (w_{n2})^2=\frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right) \longrightarrow \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_2=-2 \end{cases}$$

یعنی یکی از دو جسم 2cm به یک سمت و دیگری را 1cm در جهت مخالف می‌کشیم.

با توجه به اینکه سیستم یک درجه آزادی است تنها معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت را بیابید و از آن جا تنها فرکانس طبیعی غیر صفر را بدست آورید. هدف: یافتن یک معادله دیفرانسیل که سیستم را با شکل یک درجه آزادی نشان دهد.

$$-3k(\underbrace{x_2-x_1}_{y}) = 2m(\underbrace{\ddot{x}_2-\ddot{x}_1}_{\ddot{y}})$$

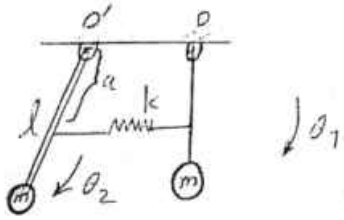
$\Leftarrow$ طرفین معادله ** را در (2-) ضرب کرده و با معادله (*) جمع می‌کنیم.

$$-3ky = 2m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y}+\left(\frac{3}{2}\frac{k}{m}\right)\cdot y=0$$

$$\boxed{w^2=\frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)}$$

حال اگر اولی را 3cm بکشیم، باز هم نسبت بادامک 2- شود، پس 1cm حرکت می‌کند و سپس متوقف می‌شود و سپس شروع به ارتعاش با w_{n2} می‌نماید.

چون فقط یک w_n داریم، در یک مکان می‌ایستد و ارتعاش می‌کند.



مسئله: معادلات پاسخ های سیستم را تعیین کنید

در بین شرایطی از شرایط اولیه حرکت سیستم مرتعش بر روی مدهای حرکت خود قرار می گیرد.

$\theta_1(0) = \phi$

$\theta_2(0) = 0$

$\dot{\theta}_1(0) = 0$

$\dot{\theta}_2(0) = 0$

$\theta_1(t) = ?$

$\theta_2(t) = ?$

(محاسبه فرکانس های طبیعی مدهای حرکت لازم است تا انجام گیرد.)

مدهای انرژی:

فرض: $\theta_2 > \theta_1$

$$\begin{cases} U = mgl(1-\cos\theta_1) + mgl(1-\cos\theta_2) + \frac{1}{2}ka^2(\theta_2-\theta_1)^2 \\ T = \frac{1}{2}\underbrace{I_o}_{ml^2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{I_{o'}}_{ml^2}\dot{\theta}_2^2 \end{cases}$$

$a(\theta_2-\theta_1) = \Delta x$

$U_{max} = T_{max}$

$$mgl\frac{\theta_1^2}{2} + mgl\frac{\theta_2^2}{2} + \frac{1}{2}ka^2(\theta_2-\theta_1)^2 = \frac{1}{2}ml^2\theta_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}ml^2\theta_2^2$$

$$\omega^2 = \frac{\theta_1^2/2 + \theta_2^2/2}{\theta_1^2/2 + \theta_2^2/2}\cdot\frac{g}{l} + \frac{\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)^2}{\frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)}\cdot\frac{a^2}{l^2}\cdot\frac{k}{m}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{\theta_1^2+\theta_2^2}\cdot\frac{a^2}{l^2}\cdot\frac{k}{m}$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \alpha \implies \omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2}\cdot\frac{a^2}{l^2}\cdot\frac{k}{m}$$

$$\frac{d(w^2)}{d\alpha} = 0 \implies 2(\alpha-1)(1+\alpha^2) - 2\alpha(-1+\alpha)^2 = 0$$

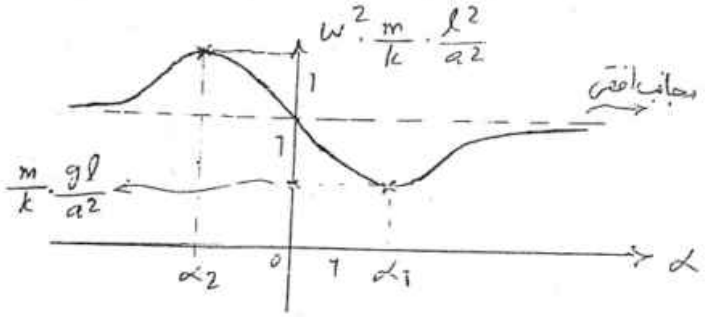
$$(\alpha-1)\left(1+\alpha^2-\alpha(-1+\alpha)\right) = 0$$

$$(\alpha-1)(1+\alpha) = 0$$

* همانطور که مشاهده می‌شود سرعت یا فرکانس ارتعاش در مد شیب دوم بیشتر از مد شیب اول است.

$$\implies \begin{cases} \alpha_1 = 1 \longrightarrow (w_1)^2 = \dfrac{g}{l} \\ \alpha_2 = -1 \longrightarrow (w_2)^2 = \dfrac{g}{l} + 2\,\dfrac{a^2}{l^2}\cdot\dfrac{k}{m} \end{cases}$$

$$w^2 \cdot \frac{m}{k}\cdot\frac{l^2}{a^2} = \frac{m}{k}\cdot\frac{g.l}{a^2} + \frac{(\alpha-1)^2}{1+\alpha^2}$$



معادلات پاسخ زمانی:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \cos w_{n_1} t + B_1 \cos w_{n_2} t \\ \theta_2(t) = C_1 \cos w_{n_1} t + D_1 \cos w_{n_2} t \end{cases}$$

$$\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right) = \text{mode shape}$$

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{A_1} = \alpha_1 \implies C_1 = A_1 \\ \dfrac{D_1}{B_1} = \alpha_2 \implies D_1 = -B_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \cos w_{n_1} t + B_1 \cos w_{n_2} t \\ \theta_2(t) = A_1 \cos w_{n_1} t - B_1 \cos w_{n_2} t \end{cases}$$

$$\phi = A_1 + B_1$$
$$0 = A_1 - B_1 \quad \Longrightarrow \quad A_1 = B_1 = \frac{\phi}{2}$$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\phi}{2}\cos W_{n_1} t + \frac{\phi}{2}\cos W_{n_2} t \\ \theta_2(t) = \frac{\phi}{2}\cos W_{n_1} t - \frac{\phi}{2}\cos W_{n_2} t \end{cases}$$

شرایط قرارگرفتن بر روی مدشیب‌ها :

1) اگر بر روی مدشیب اول قرار گیرد:

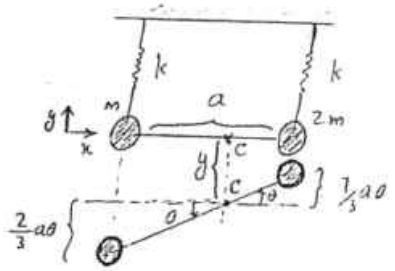
① همزمان باید برقرار باشند
$$\begin{cases} \frac{\theta_2(0)}{\theta_1(0)} = 1 \\ \frac{\dot\theta_2(0)}{\dot\theta_1(0)} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \theta_1(t) = +\phi/2 \cos W_{n_1} t \\ \theta_2(t) = +\phi/2 \cos W_{n_1} t \end{cases}$$

2) اگر بر روی مدشیب دوم قرار گیرد:

② همزمان
$$\begin{cases} \frac{\theta_2(0)}{\theta_1(0)} = -1 \\ \frac{\dot\theta_2(0)}{\dot\theta_1(0)} = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \theta_1(t) = +\phi/2 \cos W_{n_2} t \\ \theta_2(t) = -\phi/2 \cos W_{n_2} t \end{cases}$$

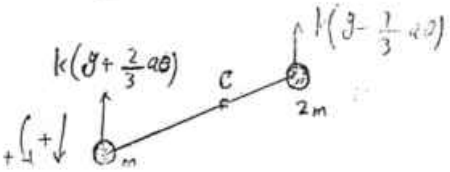
نکته: در مسئله فوق اگر بجای شرایط اولیه صفر برای سرعت، شرایط سرعت اولیه غیرصفر داشت یعنی مثلاً $\begin{cases} \dot\theta_1 = \phi \\ \dot\theta_2 = 0 \end{cases}$ باید در معادله حرکت یک اختلاف فاز هم در نظر گرفت مثلاً $\cos(W_{n_1} t - \beta)$ و $\cos(W_{n_2} t - \beta')$

مثال: فرکانس‌های طبیعی حرکت و مدشیب‌ها را برای سیستم زیر تعیین کنید.



دستگاه xy در مرکز جرم کوچکتر قرار دارد.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{0\times m + a\times 2m}{m+2m} = \frac{2}{3}a$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_y = m_{\text{کل}}\,(a_c)_y \\ \sum M_c = I_c\,\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k\left(y+\frac{2}{3}a\theta\right) - k\left(y-\frac{1}{3}a\theta\right) = 3m\ddot{y}_c \\ -k\left(y+\frac{2}{3}a\theta\right)\cdot\frac{2}{3}a + k\left(y-\frac{1}{3}a\theta\right)\frac{1}{3}a = \\ \left[m\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + 2m\left(\frac{1}{3}a\right)^2\right]\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = Y\sin\omega t \\ \theta = \Theta\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k\left(Y+\frac{2}{3}a\Theta\right) - k\left(Y-\frac{1}{3}a\Theta\right) = -3m\omega^2 Y \\ -kY\frac{a}{3} + \left(-k\cdot\frac{4}{9}a^2\Theta - \frac{k}{9}a^2\Theta\right) = -\frac{2}{3}m\omega^2 a^2\Theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(-2k+3m\omega^2\right)Y - \frac{1}{3}ka\Theta = 0 \\ -\frac{ka}{3}Y + \left(-\frac{5}{9}ka^2 + \frac{2}{3}ma^2\omega^2\right)\Theta = 0 \end{cases}$$

مدشیب $\frac{a\Theta}{Y} = \frac{-6k+9m\omega^2}{k}$

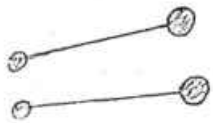
$$\begin{vmatrix} -2k+3m\omega^2 & -\frac{1}{3}ka \\ -\frac{ka}{3} & -\frac{5}{9}ka^2 + \frac{2}{3}ma^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

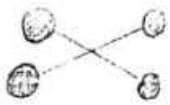
$$\Rightarrow \frac{10}{9}k^2a^2 - \frac{4}{3}kma^2\omega^2 - \frac{5}{3}kma^2\omega^2 + 2a^2m^2\omega^4 - \frac{k^2a^2}{9} = 0$$

$$\omega^4 - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}\right)\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{n_1}^2 = \dfrac{k}{m} \quad , \quad \left(\dfrac{a\theta}{Y}\right)_1 = \alpha_1 = 3 \\ \omega_{n_2}^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k}{m} \quad , \quad \left(\dfrac{a\theta}{Y}\right)_2 = \alpha_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a\theta}{Y}\right)_1 = 2 \quad \Longrightarrow \text{میله‌ها را قطع نمی‌کند} \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a\theta}{Y}\right)_2 = -1 \quad \Longrightarrow \text{میله‌ها را قطع می‌کند} \end{cases}$$





<u>مسئله</u>: مثال قبل را به روش انرژی حل کنید.

$$U = \frac{1}{2}k\left(y + \frac{2}{3}a\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(y - \frac{1}{3}a\theta\right)^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{y} + \frac{2}{3}a\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}2m\left(\dot{y} - \frac{1}{3}a\dot{\theta}\right)^2$$

$$\boxed{U_{max} = T_{max}} \Longrightarrow \frac{1}{2}k\left(Y + \frac{2}{3}a\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(Y - \frac{1}{3}a\theta\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(Y\omega + \frac{2}{3}a\theta\omega\right)^2 + m\left(Y\omega - \frac{1}{3}a\theta\omega\right)^2$$

$$\boxed{\frac{a\theta}{Y} = \alpha} \Longrightarrow \omega^2 = \frac{\frac{1}{2}k\left[\left(Y + \frac{2}{3}a\theta\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{3}a\theta\right)^2\right]}{\frac{1}{2}m\left[\left(Y + \frac{2}{3}a\theta\right)^2 + 2\left(Y\omega - \frac{1}{3}a\theta\right)^2\right]}$$

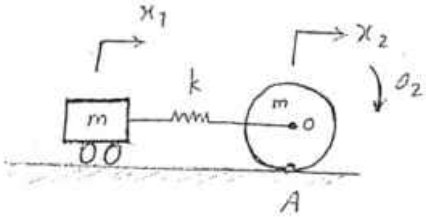
$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{\left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\alpha\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right)^2 + 2\left(1 - \frac{1}{3}\alpha\right)^2}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{5}{9}\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + 2}{\frac{2}{3}\alpha^2 + 3}\left(\frac{k}{m}\right) \Longrightarrow \frac{d(\omega^2)}{d\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{10}{9}\alpha + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\alpha^2 + 3\right) - \left(\frac{4}{3}\alpha\right)\left(\frac{5}{9}\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha - \frac{9}{2} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{3}{4} \pm \frac{9}{4} \begin{cases} \alpha_1 = 3 \ , \ \omega_{n_1}^2 = \dfrac{k}{m} \\ \alpha_2 = -\dfrac{3}{2} \ , \ \omega_{n_2}^2 = \dfrac{k}{3m} \end{cases}$$

مثال: تعیین فرکانس‌ها و مدهای سیستم زیر به روش نیوتن و انرژی.



$$T_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\dot{\theta}_2^2$$

$$= \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$\because T_2 = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}_2^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}_2^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}_2^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{3}{4} m \dot{x}_2^2 \\ \mathcal{L}U = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{T_{max} = U_{max}} \Rightarrow \frac{1}{2} m X_1^2 \omega^2 + \frac{3}{4} m X_2^2 \omega^2 = \frac{1}{2} k (X_2 - X_1)^2$$

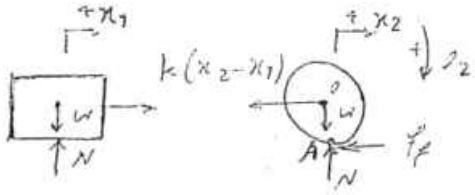
$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}(X_2 - X_1)^2}{\frac{1}{2} X_1^2 + \frac{3}{4} X_2^2} \cdot \frac{k}{m} \xrightarrow{\frac{X_2}{X_1} = \alpha} \omega^2 = \frac{(\alpha - 1)^2}{1 + \frac{3\alpha^2}{2}} \cdot \frac{k}{m}$$

$$\frac{d\omega^2}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2(\alpha - 1)\left(1 + \frac{3}{2}\alpha^2\right) - 3\alpha(\alpha - 1)^2 = 0$$

$$(\alpha - 1)\left(2 + 3\alpha^2 - 3\alpha(\alpha - 1)\right) = 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(\frac{X_2}{X_1}\right)_1 = \alpha_1 = 1 \Rightarrow \omega_{n_1}^2 = 0 \\ &\left(\frac{X_2}{X_1}\right)_2 = \alpha_2 = \frac{-2}{3} \Rightarrow \omega_{n_2}^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{k}{m} \end{aligned}}$$

روش نیوتن :



$$\begin{cases} k(x_2-x_1) = m\ddot{x}_1 \\ -k(x_2-x_1)\cdot R = \left(\frac{3}{2} m R^2\right)\cdot \ddot{\theta}_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k(x_2-x_1) = m\ddot{x}_1 & (*) \\ -k(x_2-x_1) = \frac{3}{2} m \ddot{x}_2 & (**) \end{cases}$$

این روش فقط درصورتی که یکی از جرم ها صفر شده باشد کاربرد دارد در غیر اینصورت بایستی برای روش نیوتن از راه حل های قبلی استفاده نمود.

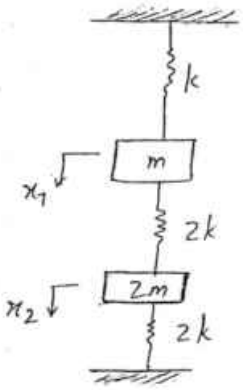
⇐ حال معادله (*) را در ضریب $\left(\frac{-3}{2}\right)$ ضرب کرده و با معادله (**) جمع می کنیم :

$$\frac{3}{2} m\left(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1\right) + k\left(x_2-x_1+\frac{3}{2}x_2-\frac{3}{2}x_1\right) = 0$$

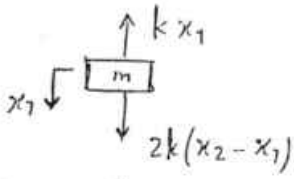
$$\frac{3}{2} m\underbrace{\left(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1\right)}_{\ddot{y}} + \frac{5}{2}k\underbrace{\left(x_2-x_1\right)}_{y} = 0$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{5}{3}\cdot\frac{k}{m}\right) y = 0 \Longrightarrow \boxed{\omega_n^2 = \frac{5}{3}\left(\frac{k}{m}\right)}$$

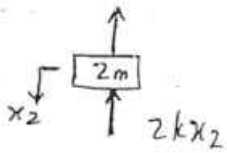
مثال: ابتدا معادلات پاسخ زمانی سیستم را تعیین کنید.
در ادامه شرایطی از شرایط اولیه حرکت سیستم مرتعشی بر روی مدهای حرکت خود قرار می گیرد.



$$\begin{cases} x_1(0) = \Delta \\ \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t) = ? \\ x_2(t) = ? \end{cases}$$



$$\begin{cases} -kx_1 + 2k(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 \\ -2k(x_2 - x_1) - 2kx_2 = 2m\ddot{x}_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -kX_1 + 2k(X_2 - X_1) = -mX_1\omega^2 \\ -2k(X_2 - X_1) - 2kX_2 = -2mX_2\omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-3k + m\omega^2)X_1 + 2kX_2 = 0 \\ 2kX_1 + (-4k + 2m\omega^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12k^2 - 6km\omega^2 - 4km\omega^2 + 2m^2\omega^4 - 4k^2 = 0$$

$$\omega^4 - 5\frac{k}{m}\omega^2 + 4\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

$$\omega^2 = \left(\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}\right)\frac{k}{m} \quad \begin{cases} \omega_1^2 = 4\frac{k}{m} \\ \omega_2^2 = \frac{k}{m} \end{cases}$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{3k - m\omega^2}{2k} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_1 = \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_2 = \alpha_2 = +1 \end{cases}$$

معادلات پاسخ زمانی :

$$\begin{cases} x_1(t) = \overbrace{A_1 \cos(\omega_{n_1} t + \varphi_1)}^{\text{قسمت اول}} + \overbrace{B_1 \cos(\omega_{n_2} t + \varphi_2)}^{\text{قسمت دوم}} \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega_{n_1} t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_{n_2} t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -A_1 \omega_{n_1} \sin(\omega_{n_1} t + \varphi_1) - B_1 \omega_{n_2} \sin(\omega_{n_2} t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2(t) = -A_2 \omega_{n_1} \sin(\omega_{n_1} t + \varphi_1) - B_2 \omega_{n_2} \sin(\omega_{n_2} t + \varphi_2) \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases} \Delta = A_1 \cos\varphi_1 + B_1 \cos\varphi_2 \\ 0 = A_2 \cos\varphi_1 + B_2 \cos\varphi_2 \\ 0 = -A_1 \omega_{n_1} \sin\varphi_1 - B_1 \omega_{n_2} \sin\varphi_2 \\ 0 = -A_2 \omega_{n_1} \sin\varphi_1 - B_2 \omega_{n_2} \sin\varphi_2 \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که چهار معادله داریم و شش مجهول (φ_1 ، φ_2 ، A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2).

بنابراین از مؤثرها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{A_2}{A_1} = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \text{سیستم با } \omega_{n_1} \text{ ارتعاش می‌کند و مؤثر اول برای آن صادق است بنابراین در معادلات پاسخ قسمت دوم حذف می‌شود.} \\ \dfrac{B_2}{B_1} = 1 \Longrightarrow \text{سیستم با } \omega_{n_2} \text{ ارتعاش می‌کند و مؤثر دوم برای آن صادق است و در معادلات پاسخ قسمت اول حذف می‌شود.} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta = A_1 \cos\varphi_1 + B_1 \cos\varphi_2 \\ 0 = -\dfrac{A_1}{2} \cos\varphi_1 + B_1 \cos\varphi_2 \\ 0 = -A_1 \omega_{n_1} \sin\varphi_1 - B_1 \omega_{n_2} \sin\varphi_2 \\ 0 = \dfrac{A_1}{2} \omega_{n_1} \sin\varphi_1 - B_1 \omega_{n_2} \sin\varphi_2 \end{cases}$$

از حل چهار معادله و چهار مجهول داریم:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \\ A_1 = \dfrac{2\Delta}{3} \quad , \quad B_1 = \dfrac{\Delta}{3} \\ A_2 = -\dfrac{\Delta}{3} \quad , \quad B_2 = \dfrac{\Delta}{3} \end{cases}$$

بنابراین (*):

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{2\Delta}{3} \cos\left(2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) + \dfrac{\Delta}{3} \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) \\ x_2(t) = -\dfrac{\Delta}{3} \cos\left(2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) + \dfrac{\Delta}{3} \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\, t\right) \end{cases}$$

اگر سیستم پس از رهایش بر روی یکی از مُدشیب‌ها قرار گیرد:

مثلاً مُدشیب اول

$$\begin{cases} \dfrac{x_2(0)}{x_1(0)} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x_1(0) = -2\,x_2(0)} \\[2ex] \dfrac{\dot{x}_2(0)}{\dot{x}_1(0)} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{\dot{x}_1(0) = -2\,\dot{x}_2(0)} \end{cases}$$

در مُدشیب اول

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{2\Delta}{3}\cos\left(2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) \\[2ex] x_2(t) = -\dfrac{\Delta}{3}\cos\left(2\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) \end{cases}$$

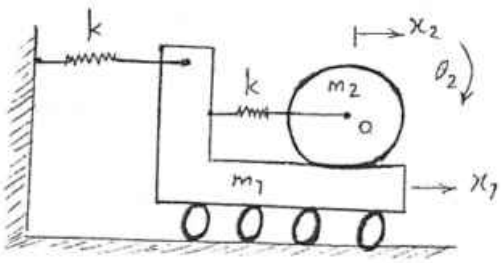
مثلاً در مُدشیب دوم

$$\begin{cases} \dfrac{x_2(0)}{x_1(0)} = 1 \Rightarrow \boxed{x_2(0) = x_1(0)} \\[2ex] \dfrac{\dot{x}_2(0)}{\dot{x}_1(0)} = 1 \Rightarrow \boxed{\dot{x}_2(0) = \dot{x}_1(0)} \end{cases}$$

در مُدشیب دوم

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{\Delta}{3}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) \\[2ex] x_2(t) = \dfrac{\Delta}{3}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) \end{cases}$$

مثال ۷: در سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده اگر حرکت غلطک نسبت به ارابه (x_2) غلطشی باشد با شرط اولیه زیر با استفاده از روش ریلی فرکانس‌های حرکت و مُدشیب‌ها و معادلات پاسخ زمانی را بدست آورید. ($m_1 = 2m_2$)



$$\begin{cases} x_1(0) = \Delta \\ x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

$m_1 = 2m_2$

$x_2 = R.(\theta_2)$

$$\vec{x}_{m_2} = \vec{x}_{m_1} + \vec{x}_{m_2/m_1} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

x_1 حرکت ارابه نسبت به زمین

$\dot{x}_1$ سرعت ارابه نسبت به زمین

x_2 حرکت غلتک نسبت به ارابه

$\dot{x}_2$ سرعت غلتک نسبت به ارابه

$$U = \frac{1}{2}k(x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_2)^2$$

چون هر دو در جهت مثبت حرکت میکنند

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2+\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}_2^2$$

$$\boxed{U_{max} = T_{max}} \Rightarrow \frac{1}{2}kX_1^2 + \frac{1}{2}kX_2^2 = \frac{1}{2}m_1X_1^2W^2 + \frac{1}{2}m_2(X_2W+X_1)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2R^2\right)\left(\frac{X_2W}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow W^2 = \frac{k(X_1^2+X_2^2)}{3m_2X_1^2 + \frac{3}{2}m_2X_2^2 + 2m_2X_1X_2}$$

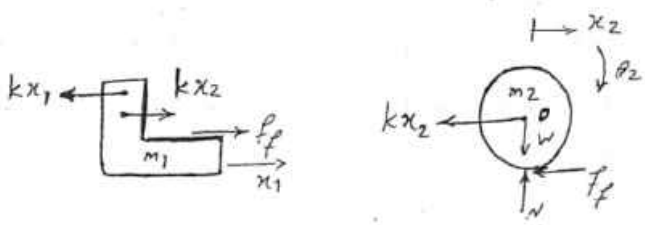
$$\boxed{\text{مرسیب } \frac{X_2}{X_1} = \alpha} \Longrightarrow W^2 = \frac{k(1+\alpha^2)}{3m_2 + \frac{3}{2}m_2\alpha^2 + 2m_2\alpha} = \left(\frac{1+\alpha^2}{\frac{3}{2}\alpha^2+2\alpha+3}\right)\frac{k}{m}$$

$$\frac{dW^2}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha\left(\frac{3}{2}\alpha^2+2\alpha+3\right) - (1+\alpha^2)(3\alpha+2) = 0$$

$$3\alpha^3 + 4\alpha^2 + 6\alpha - 3\alpha - 2 - 3\alpha^3 - 2\alpha^2 = 0$$

$$\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha - 1 = 0 \longrightarrow \alpha = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{4\times4}+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \longrightarrow W_{n1})^2 = \frac{2}{7}\frac{k}{m_2} = \frac{4}{7}\frac{k}{m_1} \\ \alpha_2 = -2 \longrightarrow W_{n2})^2 = \frac{k}{m_2} = \frac{2k}{m_1} \end{cases}$$



روش نیوتن :

$$\begin{cases} \sum F_1 = m_1\ddot{x}_1 \\ \sum F_2 = m_2(x_2+\ddot{x}_1) \\ \sum M_o = I_o\cdot\ddot{\theta}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -kx_1 + kx_2 + f_f = m_1\ddot{x}_1 \\ -kx_2 - f_f = m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1) \\ f_f \cdot R = \frac{1}{2} m_2 R^2 \left(\frac{\ddot{x}_2}{R}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -kx_1 + kx_2 + \frac{m_2}{2}\ddot{x}_2 = m_1\ddot{x}_1 \\ -kx_2 - \frac{m_2}{2}\ddot{x}_2 = m_2\ddot{x}_2 + m_2\ddot{x}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -kX_1 + kX_2 + \frac{m_2}{2}(-X_2\omega^2) = 2m_2(-X_1\omega^2) \\ -kX_2 + \frac{m_2}{2}(X_2\omega^2) = m_2(-X_2\omega^2) + m_2(-X_1\omega^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-k + 2m_2\omega^2)X_1 + \left(k - \frac{m_2}{2}\omega^2\right)X_2 = 0 \\ m_2\omega^2 X_1 + \left(-k + \frac{3}{2}m_2\omega^2\right)X_2 = 0 \end{cases}$$

مدسیب $\frac{X_2}{X_1} = \alpha = \frac{k - 2m_2\omega^2}{k - \frac{m_2}{2}\omega^2}$

$$\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - \frac{3}{2}km_2\omega^2 - 2km_2\omega^2 + 3m_2^2\omega^4 - km_2\omega^2 + \frac{m_2^2}{2}\omega^4 = 0 \Rightarrow \omega^4 - \frac{9}{7}\frac{k}{m_2}\omega^2 + \frac{2}{7}\left(\frac{k}{m_2}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{9}{14} \pm \sqrt{\frac{81}{49 \times 4} - \frac{2}{7}}\right)\frac{k}{m_2} \begin{cases} \omega_{n_1}^2 = \frac{2k}{7m_2} = \frac{4k}{7m_1}, & \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \omega_{n_2}^2 = \frac{k}{m_2} = \frac{2k}{m_1}, & \alpha_2 = -2 \end{cases}$$

چون فرکانس بستگی به دستگاه اندازه‌گیری ندارد

خیلی مهم

** اگر فرض می‌کردیم که x_2 حرکت غلتک نسبت به زمین می‌باشد مدسیب‌ها تغییر می‌کرد ولی فرکانس‌های حرکت ثابت بود:

$$\frac{X_2}{X_1} \longrightarrow \frac{X_2 + X_1}{X_1} = \frac{\alpha + 1}{1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\ \alpha_2 = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

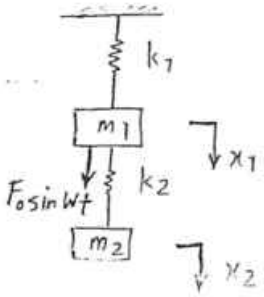
$$\theta_1 = \left(\frac{x_2 - x_1}{R}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I_0\underbrace{(\dot{\theta}_1)^2}_{\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{R}\right)^2} + \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2$$

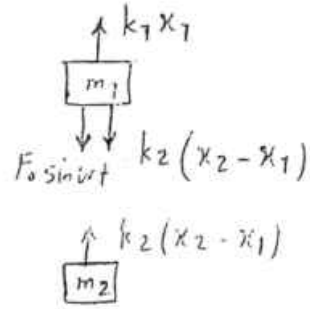
* معادلات پاسخ زمانی همانند قبل محاسبه می‌شوند.

$$U = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

* ارتعاش اجباری دو درجه آزادی و جاذب ارتعاش :



فرض $x_2 > x_1$



$$\begin{cases} -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_0 \sin wt = m_1 \ddot{x}_1 \\ -k_2(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = X_1 \sin wt \\ x_2 = X_2 \sin wt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-m_1 X_1 w^2 + k_1 X_1 - k_2 X_2 + k_2 X_1) = F_0 \sin wt \\ (-m_2 X_2 w^2 + k_2 X_2 - k_2 X_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-m_1 w^2 + k_1 + k_2) X_1 - k_2 X_2 = F_0 \\ -k_2 X_1 + (k_2 - m_2 w^2) X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1 w^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

روش کرامر $$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_2 \\ 0 & k_2 - m_2 w^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m_1 w^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 w^2 \end{vmatrix}}$$

روش کرامر $$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} -m_1 w^2 + k_1 + k_2 & F_0 \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m_1 w^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \end{vmatrix}}$$